Klausurhilfe für Mathe II bei Herrn Prof. Dr. L. Eichner

von
Ernst Otto Schäfer

Inhaltsverzeichnis

1 Integrationsmethoden **5**
1.1 Partielle Integration (auch Produktregel) 5
1.2 Substitution (auch Kettenregel) 5
1.3 Zweite Substitutionsformel 7
1.4 Substitution bei bestimmten Integralen 8
1.5 Integration durch Partialbruchzerlegung 9
1.5.1 Integration von gebrochen rationalen Funktionen 9

2 Numerische Integration / Integrationsverfahren **11**
2.1 Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren) 11
2.2 Simpsonverfahren 12

3 Berechnung eines Flächeninhalts der von zwei Kurven einsgeschlossen wird. **13**

4 Relative Extrema **15**

5 Tangentialebene **17**

6 Lineare Differentialgleichungen **19**

7 Bogenlänge, Mantelfiche, Rotationvolumen von Drehkörpern **21**
7.1 Bogenlänge von Rotationskörpern (Parameterform) 21
7.2 Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform) 21
7.3 Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform) 21
7.4 Mantelfläche eines Drehkörpers 21
7.5 Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform) 21
7.6 Krümmung (in Parameterform) 22
7.7 Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse 22
7.8 Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse 22
7.9 Bogenläge einer Kurve 22
7.10 Mantelfläche eines Körpers 22

8 Kreis, Elipse, Hyperbel, Parabel **23**
8.1 Kreis 23
8.2 Ellypse 23
8.3 Hyperbel 23
8.4 Parabel 23

9 Anfangswertproblem **25**

Kapitel 1

Integrationsmethoden

1.1 Partielle Integration (auch Produktregel)

$$\int uv' = uv - \int u'v \tag{1.1}$$

Partielle Integration (=¿ Faktorenvertauschung):

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \int \ln x \cdot x \, dx \tag{1.2}$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \tag{1.3}$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C \tag{1.4}$$

Nicht vergessen, die Integrationskonstante hinzuzufügen! (+C)

1.2 Substitution (auch Kettenregel)

$$\int g(u) \cdot u'(x) \, dx = \int g(u) \, du_{|_{u=u(x)}} \tag{1.5}$$

Integration durch Substitution

$$\int \left(3 + x^5\right) x^4 \, dx = \frac{1}{5} \int \left(3 + x^5\right) 5x^4 \, dx \tag{1.6}$$

nach der Substitutionsformel

$$\left(\frac{1}{5} \int u \, du\right) \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \frac{\left(3 + x^5\right)^2}{2} + C = \frac{\left(3 + x^5\right)^2}{10} + C \tag{1.8}$$

Formale Vorgehensweise bei der Substitution:

1. Sei $\int g(u(x)) \cdot u'(x) \, dx$
2. Setze $u = u(x)$
3. $\frac{du}{dx} = u'(x)$ woraus wird $du = u'(x) \, dx$
4. Dann ersetze $u(x)$ durch u und $u'(x) \, dx$ ersetzen.

Integration durch Substitution

$$\int (x^5+7)^3 x^4 \, dx = \frac{1}{5} \int (x^5+7)^3 5x^4 \, dx \tag{1.9}$$

Mit $u = x^5 + 7$; $\frac{du}{dx} = 5x^4$ wird $du = 5x^4 \, dx$. Damit wird in 1.9 substituiert:

$$\frac{1}{5} \int u^3 \, du = \frac{1}{5} \frac{u^4}{4} + C = \frac{u^4}{20} + C \tag{1.10}$$

Rücksubstituion:

$$= \frac{(x^5+7)^4}{20} + C \tag{1.11}$$

Rücksubstituion
Substitution ist sinnvoll, wenn Integrale nicht in der Form $\int g(u(x)) \cdot u'(x) \, dx$ vorliegen! Beispiel:

$$\int x\sqrt{x+1} \, dx \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} u &= x+1 && (1.13)\\ \frac{du}{dx} &= 1 && (1.14)\\ du &= dx && (1.15) \end{aligned}$$

die Substitution in 1.12 durch $x = u - 1$, um die Wurzel als eine Variable $a^{\frac{1}{2}}$ darstellen zu können und einfach integrieren zu können:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (u-1)\sqrt{u} \, du && (1.16)\\ &= \int (u-1) \cdot u^{\frac{1}{2}} \, du && (1.17)\\ &= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) \, du && (1.18)\\ &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C && (1.19) \end{aligned}$$

Nach Durchführung der Rücksubstitution ergibt sich aus Gleichung 1.19:

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Substitution, wenn Integrale nicht als $\int g(u(x)) \cdot u'(x) \, dx$ vorliegen

$$\int \frac{1}{x^2+p} \, dx \tag{1.20}$$

für $p > 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1} \, dx &= \arctan + C && (1.21)\\ &= \frac{1}{p} \int \frac{1}{\frac{x^2}{p}+1} \, dx && (1.22) \end{aligned}$$

Substitution:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} \tag{1.23}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{p}} \tag{1.24}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{p}}dx \tag{1.25}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{p}})^2+1}\frac{1}{\sqrt{p}}dx \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{p}}(\arctan + C) \tag{1.27}$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}(\arctan\frac{x}{\sqrt{p}} + C) = \frac{1}{\sqrt{p}}\arctan\frac{x}{\sqrt{p}} + C \tag{1.28}$$

Substitution, wenn Integrale nicht als $\int g(u(x)) \cdot u'(x)dx$ vorliegen

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx \tag{1.29}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan + C \tag{1.30}$$

Quadratische Ergänzung der Ausgangsformel:

$$x^2+bx+c = x^2+bx+(\frac{b}{2})^2-(\frac{b}{2})^2+c = (x+\frac{b}{2})^2-(\frac{b}{2})^2+c \tag{1.31}$$

$$p := -(\frac{b}{2})^2+c$$

.

$$u = x+\frac{b}{2}\ \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+p}dx \overset{Subst.}{\widehat{=}} \int \frac{1}{u^2+p}\,du \tag{1.32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\arctan\frac{u}{\sqrt{p}} + C \tag{1.33}$$

$$\overset{Rucks.}{\widehat{=}} \frac{1}{\sqrt{c-(\frac{b}{2})^2}}\cdot\arctan\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-(\frac{b}{2})^2}} + C \tag{1.34}$$

Dies gilt nur für $c - \frac{b^2}{4} > 0$

1.3 Zweite Substitutionsformel

Integration durch Substitution mit einer Funktion

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \otimes \tag{1.35}$$

Der sog. „trigonometrische Pythagoras“ ist bekannt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Hier gilt:

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$
$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$$

Setze $x = \sin u$, also $\frac{dx}{du} = \cos u$, $dx = \cos u \cdot du$.
Substitution von x und dx:

$$\begin{aligned}
= \int \sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u \, du &= \int \cos^2 u \, du && (1.36)\\
&= \int \cos u \cdot \cos u \, du && (1.37)\\
&= \frac{1}{2} (\cos u \cdot \sin u + u) + C && (1.38)\\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \sin u + u \right) + C && (1.39)
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{1 - x^2} \cdot x + \arcsin x + C \tag{1.40}$$

Formale Vorgehensweise bei der zweiten Substitutionsregel:

1. Sei $x = g(u)$ nach u differenzierbar und nach u auflösbar.
2. Dann ist
$$\int f(x) \, dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) \, du_{|_{u=g^{-1}(x)}} \tag{1.41}$$
Dies ist genau die erste Substitutionsregel rückwärts gelesen. Eventuell ist nämlich der Ausdruck auf der rechten Seite einfacher integrierbar; dies zeigt sich nur durch Ausprobieren.

1.4 Substitution bei bestimmten Integralen

$$\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1} \, dx = \tag{1.42}$$

$u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$, $\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$, $u(-1) = 0$ $u(3) = 4$

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (u-1) \, u^{\frac{1}{2}} \, du &= \int_0^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) \, du && (1.43)\\
&= \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 && (1.44)\\
&= \frac{112}{15} && (1.45)
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \tag{1.46}$$

$x = \sin(u)$, $\frac{dx}{du} = \cos(u)$ $dx = \cos(u) \cdot du$, $u = \arcsin(x)$, $u(0) = 0$, $u(1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
= \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u \cdot u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot du && (1.47)\\
&= \left[\frac{1}{2} (sin(u) \cdot cos(u) + u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} && (1.48)\\
&= \frac{\pi}{4} && (1.49)
\end{aligned}$$

1.5 Integration durch Partialbruchzerlegung

1.5.1 Integration von gebrochen rationalen Funktionen

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx \tag{1.50}$$

$Z(x)$ = Zählerpolynom, $N(x)$ = Nennerpolynom

Wenn $Z(x) \leq N(x)$ muß eine Polynomdivision durchgeführt werden.

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = p(x) + \frac{Z_1(x)}{N(x)} \Rightarrow Z_1(x) \leq N(x) \tag{1.51}$$

$$\left(x^3 + x^2 - x + 3\right) : \left(x^2 + x - 2\right) = x + \frac{x+3}{x^2+x-2} \tag{1.52}$$

$$\int \frac{Z_1(x)}{N(x)} \tag{1.53}$$

$\Rightarrow$ auf die Summe von einer der sechs Grundtypen umzuformen, die leicht zu integrieren sind:

a-1 $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$. Hier steht im Zähler die Ableitung des Nenners.

a-2 $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$ mit $n > 1$

b-1 $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln\left|x^2+bx+c\right| + C$. Hier steht im Zähler die Ableitung des Nenners.

b-2 $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{\left(x^2+bx+c\right)^{-n+1}}{-n+1} + C$ mit $n > 1$

c-1 $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \cdot \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + C$ für $c - \frac{b^2}{4} > 0$, wodurch das Polynom x^2+bx+c nur komplexe Nullstellen hat.

c-2 $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \left(c-\frac{b^2}{4}\right)^{-n+\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$. Die Integration des Integrals auf der rechten Seite ist nach der Produktregel (mit »Rekursionsformel«) möglich. Mit $t = \frac{x+\frac{b}{2}}{c-\frac{b^2}{4}}$, weil Substitution durchgeführt wurde.

Allgemeine Vorgehensweise zur Integration gebrochen rationaler Funktionen

1. Nullstellen des Nennerpolynoms $N(x)$ berechnen und $N(x)$ in lineare und unzerlegbare quadratische Faktoren zerlegen. Im Bereich $\mathbb{R}$ kommen ggf. noch quadratische nicht in $\mathbb{R}$ zerlegbare Faktoren vor. Also wird

$$N(x) = \ldots \cdot (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots \tag{1.54}$$

2. Partialbruch-Ansatz:

$$\frac{Z(x)}{\ldots \cdot (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots} = \ldots + \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_K}{(x-a)^k} + \ldots \tag{1.55}$$

$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots \tag{1.56}$$

$$+ \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l} \tag{1.57}$$

Das Zählerpolynom $Z(x)$ ist in unbekannte Koeffizienten und lineare Gleichungen mit Koeffizienten im Nenner aufgeteilt.

3. Gesamte Gleichung mit dem Hauptnenner $N(x)$ multipliziert;

4. Koeffizienten A_1, A_2 ausgerechnen.

5. Integration der Partialbruchzerlegung.

6. Partialbrüche notieren, sie entstehen aus dem Partialbruchansatz nach Einsetzen der berechneten Koeffizienten.

Beispiel Klausuraufgabe

Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{3x^2 + 8x + 8}{x \cdot (x+2)^2}\, dx = \otimes \tag{1.58}$$

$$\frac{3x^2 + 8x + 8}{x \cdot (x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \tag{1.59}$$

$$3x^2 + 8x + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \tag{1.60}$$

Einsetzen

x = 0:

$$8 = A \cdot 4 \;\Rightarrow\; A = 2 \tag{1.61}$$

x = -2:

$$12 - 16 + 8 = -2C \tag{1.62}$$

$$4 = -2C \;\Rightarrow C = -2 \tag{1.63}$$

x = 1:

$$3 + 8 + 8 = A \cdot 9 + 3B + C \tag{1.64}$$

$$19 = 18 + 3B - 2 \tag{1.65}$$

$$\Rightarrow\; 3 = 3B \;\Rightarrow B = 1 \tag{1.66}$$

$$\otimes = \int \frac{2}{x}\, dx * \int \frac{1}{x2}\, dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2} \tag{1.67}$$

$$= \underline{\underline{2\ln|x| + \ln|x+2| + 2(x+2)^{-1} + C}} \tag{1.68}$$

Kapitel 2

Numerische Integration / Integrationsverfahren

2.1 Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren)

Bei diesem Verfahren muss die Funktion differenzierbar sein. Lösungsverfahren:

1. Wähle a

2. Lege durch $(a|f(a))$ die Tangente an $f(x)$. Tangentengleichung in Punktsteigungsform:

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \tag{2.1}$$
$$\Leftrightarrow y = f'(a)(x-a)+f(a) \tag{2.2}$$

3. Berechne Schnittpunkt x der Tangente mit der x-Achse als Näherung der Nullstelle. Dazu wird die Tangentengleichung 0 gesetzt, um den Schnittpunkt mit der x-Achse als Näherungswert der Nullstelle zu berechnen:

$$0 = f'(a)(x-a)+f(a) \tag{2.3}$$
$$\Leftrightarrow x = a-\frac{f(a)}{f'(a)} \tag{2.4}$$

   Diese Formel zur Berechnung des Näherunswertes der Nullstelle wird formuliert als sog. Iterationsfunktion des Newtonverfahrens lautet:

$$g(x) := x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.5}$$

4. Wenn die Genauigkeit nicht ausreicht: Setze $a = x$ und wiederhole Schritt 2 und 3. Das heißt unter Verwendung der Iterationsfunktion: setze $g(x)$ als x in $g(x)$ ein (Iterieren). Auf diese Weise nähert man sich dem tatsächlichen Wert immer mehr an.

Beispiel:
Gegeben sie dieFunktion $f(x) = x^2 - \sin x$
Berechnen Sie die Newton-Iteration zur Berechnung von Nullstellen von $f(x)$.

1. f'(x) berechnen:

$$f'(x) = 2x - \cos x \tag{2.6}$$

2. Berechnung der Newton-Iterationsfunktion

$$g(x) = x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.7}$$

$$= \quad x - \frac{x^2 - \sin x}{2x - \cos x} \tag{2.8}$$

$$= \quad \frac{x \cdot (2x - \cos x)}{2x - \cos} - \frac{x^2 - x \sin x}{2x - \cos x} \tag{2.9}$$

$$= \quad \frac{2x^2 - x \cos x - x^2 + \sin x}{2x - \cos x} \tag{2.10}$$

$$= \quad \underline{\underline{\frac{x^2 - x \cos x + \sin x}{2x - \cos x}}} \tag{2.11}$$

2.2 Simpsonverfahren

Beispiel:

Berechnen Sie für $n = 4$ mittels Simpsonverfahren unter Verwendung es aus den Übungen bekannten Schemas das bestimmten Integrals $S = \int_2^4 \sqrt{1 + \cos^2 t}\; dt$ (Ergebnisse und Zwischenerkenntnisse mit 4 Nachkommastellen.)

i	x_i	Y_0 und Y_4	Y_i (i ungerade)	Y_i (i gerade)
0	2	1,0831		
1	2,5		1,2813	
2	3			1,4072
3	3,5		1,3700	
4	4	2,2778		1,4072
			2,6513	
			10,6052	2,8143

$$\alpha = 2,2778;\ \beta = 10,6052;\ \gamma = 2,8143 \tag{2.12}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \quad = \quad 15,6973 \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow S \quad = \quad \frac{h}{3} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \tag{2.14}$$

$$= \quad \underline{\underline{2,6162}} \tag{2.15}$$

Wichtig!!! → Bei der Berechnung der Werte den Taschenrechner auf RAD stellen!!!
Berechnung der Werte am Beispiel von Y_0:

$$t \quad = \quad 2 \tag{2.16}$$

$$Y_0 \quad = \quad \sqrt{1 + \cos^2 2}\, dt \tag{2.17}$$

$$Y_0 \quad = \quad \underline{\underline{1,0831}} \tag{2.18}$$

Kapitel 3

Berechnung eines Flächeninhalts der von zwei Kurven einsgeschlossen wird.

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den beiden Kurven $f(x) = x^3 + x^2 - x$ und $g(x) = 2x^2 + x$ eingeschlossenen Bereichs. Das Ergebnis ist als rationale Zahl anzugeben.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) && (3.1)\\
f(x) - g(x) &= x^3 - x^2 - 2x && (3.2)\\
&= 0 && (3.3)\\
\Rightarrow\ 0 &= x(x^2 - x - 2) && (3.4)\\
\Rightarrow\ x_1 &= 0; && (3.5)\\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} && (3.6)\\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} && (3.7)\\
\Rightarrow x_2 &= \underline{\underline{-1}} && (3.8)\\
\Rightarrow x_3 &= \underline{\underline{2}} && (3.9)
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Relative Extrema

1. $\Delta(x_0,\, y_0) >\Rightarrow$ bei $(x_0,\, y_0)$ rel. EW und zwar
   (a) rel. Max, wenn $f_{xx}(x_0,\, Y_0) < 0$ oder $[f_{YY}] < 0$
   (b) rel. Min, wenn $f_{xx}(x_0,\, Y_0) > 0$ oder $[f_{YY}] > 0$
2. $\Delta(x_0,\, Y_0) < 0 \Rightarrow$ bei $(x_0,\, Y - 0)$ kein EW, sondern Sattelunkt
3. $\Delta(x_0,\, Y_0) = 0 \Rightarrow$ bei $(x_0,\, Y - 0)$ rel. EW, oder nicht, weitere Untersuchung nötig.

Kapitel 5

Tangentialebene

$$\left.\begin{array}{lccc} I: & x = x_0 + \lambda & \Rightarrow & \lambda = x - x_0 \\ II: & Y = Y - 0 + \mu & \Rightarrow & \mu = Y - Y_0 \end{array}\right\} in\ III:\ einsetzen \tag{5.1}$$

$$III:\ Z = Z_0 + \lambda f_{(x)}\left(x_0,\ Y_0\right) + \mu f_{(Y)}\left(x_0,\ Y_0\right) \tag{5.2}$$

Kapitel 6

Lineare Differentialgleichungen

1. Trennung der Variablen

$$\frac{1}{Y}\, dy = x\, dx \tag{6.1}$$

2. Quatrieren

$$\ln |Y| = \frac{x^2}{2} + C \tag{6.2}$$

3. Auflösen

$$\begin{aligned} e^{\ln |Y|} &= e^{\frac{x^2}{2}+C} && (6.3)\\ \Rightarrow |Y| &= e^{\frac{x^2}{2}+C} && (6.4)\\ Y &= e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} && (6.5)\\ Y &= K \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow K \in \mathbb{R} && (6.6) \end{aligned}$$

Beispiel:

Kapitel 7

Bogenlänge, Mantelfche, Rotationvolumen von Drehkörpern

7.1 Bogenlänge von Rotationskörpern (Parameterform)

1. Tangente in Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ Y\,(t) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x\,(t) \\ Y\,(t) \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

2. Tangente Parameterfrei

$$\frac{Y - Y\,(t)}{x - x\,)t)} = \frac{Y\,(t)}{x\,(t)} \tag{7.2}$$

3. Normale in Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ Y\,(t) \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -Y\,(t) \\ x\,(t) \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

4. Normale Parameterfrei

$$\frac{Y - Y\,(t)}{x - x\,(t)} = \frac{-x\,(t)}{Y\,(t)} \tag{7.4}$$

7.2 Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform)

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} Y\,(t) \cdot \dot{x}\,(t)\ dt \tag{7.5}$$

7.3 Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform)

$$V_Y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x\,(t)^2 \cdot \dot{Y}\,(t)\ dt \tag{7.6}$$

7.4 Mantelfläche eines Drehkörpers

7.5 Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform)

Drehung um die x-Achse

$$O = 2\pi \int_{t_1} t_2 \cdot Y\,(t) \cdot \sqrt{\dot{x}\,(t)^2 + \dot{Y}\,(t)^2}\ dt \tag{7.7}$$

7.6 Krümmung (in Parameterform)

$$K(t) = \frac{\ddot{x}\dot{x} - \dot{Y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{Y}^2}^3} \quad mit\ x \neq 0\ oder\ \dot{Y} \neq 0 \tag{7.8}$$

7.7 Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\ dt = \pi \int_a^b Y^2\ dx \tag{7.9}$$

7.8 Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse

Die Grenzen von oben einsetzen in $Y \Longrightarrow$ neue Grenzen (aus Aufgabe)

$$V_Y = \pi \cdot \int_a^b g^2(Y)\ dt = \pi \int_a^b x^2\ dx \tag{7.10}$$

7.9 Bogenläge einer Kurve

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \tag{7.11}$$

7.10 Mantelfläche eines Körpers

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \tag{7.12}$$

Kapitel 8

Kreis, Elipse, Hyperbel, Parabel

Ursprungsform $\Rightarrow$ Hauptform

8.1 Kreis

$$\begin{aligned} x^2 + Y^2 &= R^2 & (8.1) \\ \Rightarrow (x - x_0) + (Y - Y_0) &= R^2 & (8.2) \end{aligned}$$

8.2 Ellypse

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1 & (8.3) \\ \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_0)^2}{b^2} &= 1 & (8.4) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1 & (8.5) \\ \Rightarrow \frac{(x - 5)^2}{6} + \frac{(Y + 4)^2}{4} &= 1 & (8.6) \\ M &= (5; -4) & (8.7) \\ a = \sqrt{6} \qquad & b = \sqrt{4} = 2 & (8.8) \end{aligned}$$

8.3 Hyperbel

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} &= 1 & (8.9) \\ \Rightarrow \frac{(x - x_0)}{a^2} - \frac{(Y - Y_0)^2}{b^2} &= 1 & (8.10) \end{aligned}$$

8.4 Parabel

$$\begin{aligned} Y^2 &= 2px & (8.11) \\ \Rightarrow (Y - Y_0)^2 &= 2p\,(x - x_0) & (8.12) \end{aligned}$$

Kapitel 9

Anfangswertproblem

Lösen Sie das Anfangswertproblem

Index

, 6

Auflösen
  Lineare Differentalgleichung, 19

Bogenläge einer Kurve, 22
  Bogenlänge, 22
  Mantelfläche, 22
  Rotationsvolumen, 22
Bogenlänge, 21, 22
  Bogenläge einer Kurve, 22
  Drehkörper, 21, 22
  Krümmung (in Parameterform), 22
  Mantelfläche eines Drehkörpers, 21
  Mantelfläche eines Körpers, 22
  Rotationskörper, 21
  Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse, 22
  Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse, 22
  Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform), 21
  Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform), 21

Drehkörper, 21, 22
  Bogenlänge, 21, 22
  Mantelfläche, 21, 22
  Rotationsvolumen, 21, 22

Integralrechnung, 5
Integration
  durch Substitution, 5
Integration durch Partialbruchzerlegung
  Integrationsmethoden, 9
Integration durch Substitution, 5
Integration von gebrochen rationalen Funktionen
  Integrationsmethoden, 9
Integrationsmethoden, 5, 7–9
  Integration durch Partialbruchzerlegung, 9
  Integration von gebrochen rationalen Funktionen, 9
  Partielle Integration, 5
  Substitution (auch Kettenregel), 5
  Substitution bei bestimmten Integralen, 8
  Substitution mit einer Funktion), 7
  Zweite Substitutionsformel, 7
Integrationsverfahren
  Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren), 11
Intergralrechnug, 5, 7–9

Krümmung (in Parameterform), 22
  Bogenlänge, 22
  Mantelfläche, 22
  Rotationsvolumen, 22
Kreis, 23

Lineare Differentalgleichung, 19
  Auflösen, 19
  Quatieren, 19
  Trennung der Variablen, 19

Mantelfläche, 21, 22
  Bogenläge einer Kurve, 22
  Drehkörper, 21, 22
  Krümmung (in Parameterform), 22
  Mantelfläche eines Drehkörpers, 21
  Mantelfläche eines Körpers, 22
  Rotationskörper, 21
  Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse, 22
  Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse, 22
  Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform), 21
  Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform), 21
Mantelfläche eines Drehkörpers, 21
  Bogenlänge, 21
  Mantelfläche, 21
  Rotationsvolumen, 21
Mantelfläche eines Körpers, 22
  Bogenlänge, 22
  Mantelfläche, 22
  Rotationsvolumen, 22

Newton-Iteration
  Numerische Integration / Integrationsverfahren, 11
Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren)
  Integrationsverfahren, 11
Numerische Integration, 11
  Simpsonverfahren, 12
Numerische Integration / Integrationsverfahren
  Newton-Iteration, 11

Parabel, 23
Partialbruch-Ansatz, 9
Partielle Integration
  Integrationsmethoden, 5

Quatrieren

Lineare Differentalgleichung, 19

Relative Extrema, 15
Rotationskörper, 21
Bogenlänge, 21
Mantelfläche, 21
Rotationsvolumen, 21
Rotationsvolumen, 21, 22
Bogenläge einer Kurve, 22
Drehkörper, 21, 22
Krümmung (in Parameterform), 22
Mantelfläche eines Drehkörpers, 21
Mantelfläche eines Körpers, 22
Rotationskörper, 21
Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse, 22
Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse, 22
Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform), 21
Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform), 21
Rotationsvolumen eines Körpers um die x-Achse, 22
Bogenlänge, 22
Mantelfläche, 22
Rotationsvolumen, 22
Rotationsvolumen eines Körpers um die Y-Achse, 22
Bogenlänge, 22
Mantelfläche, 22
Rotationsvolumen, 22
Rotationsvolumen um die x-Achse (Parameterform), 21
Bogenlänge, 21
Mantelfläche, 21
Rotationsvolumen, 21
Rotationsvolumen um die Y-Achse (Parameterform), 21
Bogenlänge, 21
Mantelfläche, 21
Rotationsvolumen, 21

Simpsonverfahren
Numerische Integration, 12
Substitution, 8
Integration durch, 5
Substitution (auch Kettenregel)
Integrationsmethoden, 5
Substitution bei bestimmten Integralen
Integrationsmethoden, 8
Substitution mit einer Funktion
Integrationsmethoden, 7
Substitutionsformel, 5
Substitutionsregel
Formale Vorgehensweise bei der ersten, 5
Formale Vorgehensweise bei der zweiten, 8

Tangente in Parameterform, 21
Tangentialebene, 17
Trennung der Variablen
Lineare Differentalgleichung, 19

Zweite Substitutionsformel
Integrationsmethoden, 7