VORLESUNGSMODUL MATHEMATIK 2
- VORLMOD MATHE2 -

MATTHIAS ANSORG

ZUSAMMENFASSUNG. Studentische Mitschrift der Vorlesung Mathematik 2 bei Prof. Dr. Eichner (Wintersemester 2001/2001) im Studiengang Informatik, 2. Fachsemester, an der FH Gießen-Friedberg, Studienort Gießen.

- **Bezugsquelle:** Die vorliegende studentische Mitschrift steht im Internet zum Download bereit: http://homepages.fh-giessen.de/~hg12117/index.html. Wenn sie fertig geschrieben ist, wird sie auch über die Skriptsammlung der Fachschaft Informatik der FH zu beziehen sein.
- **Lizenz:** Diese studentische Mitschrift ist public domain, darf also ohne Einschränkungen oder Quellenangabe für jeden beliebigen Zweck benutzt werden, kommerziell und nichtkommerziell; jedoch enthält sie keinerlei Garantien für Richtigkeit oder Eignung oder sonst irgendetwas, weder explizit noch implizit. Das Risiko der Nutzung dieser studentischen Mitschrift liegt allein beim Nutzer selbst. Einschränkend sind außerdem die Urheberrechte der verwendeten Quellen zu beachten.
- **Korrekturen:** Fehler zur Verbesserung in zukünftigen Versionen, sonstige Verbesserungsvorschläge und Wünsche bitte dem Autor per e-mail mitteilen: Matthias Ansorg, ansis@gmx.de.
- **Format:** Das vorliegende Script wurde mit dem Programm LyX (graphisches Frontend zu LaTeX) unter Linux erstellt und als pdf-Datei exportiert.
- **Dozent:** Prof. Dr. Lutz Eichner
- **Verwendete Quellen:** .

INHALTSVERZEICHNIS

Date: 10. Oktober 2001 bis 8. Mai 2002.

1. Organisatorisches

1.1. **Hausübungen.** Es gibt wieder freiwillige Hausübungen - wer sie beherrscht, hat eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit, den Schein zu bekommen. Die Anmeldung zu diesen Hausübungen muss erfolgen über das System für Klausuren (nur noch bis nächsten Mo offen, keine Anmeldungen danach möglich!; steht unter Übungen im Internet). Am Mo 2001-10-08 werden die Gruppeneinteilungen für die Hausübungen ausgehängt. Wer die Gruppe wechselt, bekommt 0 Punkte. Wer zu den Übungen nicht kommen kann, sollte sich Mitschriften besorgen.

Die Übungen müssen mit der eigenen Handschrift handgeschrieben eingereicht werden, nicht in Sichthüllen oder Ordnern. Die Gruppeneinteilung der Hausübungen sagt nur etwas darüber, wer die Übungen nachschaut; der Stoff ist für alle gleich, die Bearbeitung ist selbständig. Abgabe ist jeweils 14:00 Uhr, wie allgemein angegeben.

1.2. **Klausur.** Es wird alternativ eine Klausur vor, eine nach den Ferien angeboten. Wer in der ersten durchfällt, kann die zweite auch mitschreiben; fällt er dort auch durch, zählt das allerdings als zweimal durchgefallen. Hilfsmittel in den Klausuren: alle Unterlagen und Bücher, ein beliebiger, auch ein programmierbarer, Taschenrechner, jedoch kein Notebook. Die Aufgaben sind jedoch so gestellt, dass programmierbare Taschenrechner nicht viel helfen.

Die Klausur enthält hauptsächlich reproduktive Aufgaben, keine oder nur sehr wenige »Denkaufgaben«. Den Schein kann man also im Normalfall erhalten, wenn man nur die reproduktiven Aufgaben (nach Stil der Übungen, ohne scharfsinige Überlegungen) beherrscht. Übungsmethode: alte Klausuren und Übungen durchrechnen, um Routine zu entwickeln, die wichtig ist, um die Klausur in der gegebenen Zeit zu bewältigen. Die Mathe2-Klausur ist gut bestehbar, wenn man aus den verfügbaren alten Klausuren lernt.

Die letzte in der Fachschaft verfügbare Klausur ist ähnlich zur kommenden Klausur im Wintersemester 2001 / 2002.

Welche Fragestellungen werden sehr häufig gestellt? Bei Prof. Eichner nur alte Klausren zu lösen ist sehr sinnvoll, denn die Art der Aufgaben ist mit alten Klausuren identisch (es ändern sich nur Werte usw.).

- Newton-Iterationsverfahren
- Substitution bei unbestimmtem Integral
- Flächeninhalt zwischen Kurven integrieren
- Integrieren durch Partialbruchzerlegung
- uneigentliches Integral
- Simpsonverfahren mit Tabellenschema aus der Übung
- Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die y-Achse
- Bogenlänge einer Kurve
- Kegelschnitttypen
- Hauptformen der Kegelschnittsgleichungen: Mitteplunkt, Hauptachsenlänge, Scheitelpunkt, Parameter als rationale Zahl
- Bogenlänge einer Funktion in Parameterdarstellung
- Radius des Krümmungskreises
- Extremwerte von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen
- Bereichsintegrale
- Anfangswertproblem
- allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung
- partikuläre Lösung einer Differentialgleichung
- Relation, Transitivität und Äquivalenzen
  - Polynomdivision mit modulo 2
  - Transitivität der Relation
  - Zahlenringe

1.3. **Allgemeines.**

- Es ist immer sinnvoll, Verfahren statt Formeln zu lernen: quadratische Ergänzung statt pq-Formel; weil so universellere Anwendung möglich ist.
- Gemischte Zahlen sollen vermieden werden.

2. Integrationsmethoden

2.1. **Partielle Integration (auch Produktregel).** Wiederholung von Mathemathik 1, deshalb ohne Herleitung:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Dies ist die Umkehrung der Produktregel zum Ableiten:

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ \Leftrightarrow \int (uv)' &= \int uv' + \int u'v \\ \Leftrightarrow uv - \int u'v &= \int uv' \end{aligned}$$

Example 1. Partielle Integration

Example. (unter Faktorenvertauschung):

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot x \, dx \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Nicht vergessen, die Integrationskonstante hinzuzufügen!

2.2. **Substitution (auch Kettenregel).** Es ist die Umkehrung der Kettenregel als Differentiationsregel.

$$\int g(u) \cdot u'(x) \; dx = \int g(u) \; du_{|u=u(x)}$$

Aussprache des rechten Teils: »Integral über g von u nach du für $u = u(x)$« (d.h. es ist Rückersetzung nötig).

Example 2. Integration durch Substitution

Example.

$$\int \left(3 + x^5\right) x^4 \, dx = \frac{1}{5} \int \left(3 + x^5\right) 5x^4 \, dx \tag{1}$$

Da jetzt die Form $\int g(u) \cdot u'(x) \; dx$ vorliegt, kann die Substitutionsformel angewandt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \left(3 + x^5\right) 5x^4 \, dx &= \frac{1}{5} \int u \, du_{|u=3+x^5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} u^2_{|u=3+x^5} + C \\ &= \frac{1}{5} \frac{\left(3 + x^5\right)^2}{2} + C = \frac{\left(3 + x^5\right)^2}{10} + C \end{aligned}$$

Formale Vorgehensweise bei der Substitution:

(1) Sei $\int g(u(x)) \cdot u'(x) \; dx$
(2) Setze $u = u(x)$
(3) $\frac{du}{dx} = u'(x)$ woraus wird $du = u'(x) \; dx$
(4) Dann ersetze $u(x)$ durch u und $u'(x) \; dx$ durch du ersetzen.

Example 3. Integration durch Substitution

Example.

$$\int \left(x^5 + 7\right)^3 x^4 \, dx = \frac{1}{5} \int \left(x^5 + 7\right)^3 5x^4 \, dx \tag{2}$$

Mit $u = x^5 + 7$; $\frac{du}{dx} = 5x^4$ wird $du = 5x^4 \, dx$. Damit wird in 2 substituiert:

$$\frac{1}{5} \int u^3 \, du = \frac{1}{5} \frac{u^4}{4} + C = \frac{u^4}{20} + C$$

Am Schluss erfolgt die Rücksubstituion:

$$= \frac{(x^5+7)^4}{20} + C$$

Die formale Vorgehensweise sollte immer angewandt werden, wenn die Anwendbarkeit der Substitutionsregel nicht offensichtlich ist: Substitution ist manchmal auch sinnvoll, wenn Integrale nicht in der Form $\int g(u(x)) \cdot u'(x)\ dx$ vorliegen! Beispiel dazu:

Example 4. Substitution, wenn Integrale nicht als $\int g(u(x)) \cdot u'(x)\ dx$ vorliegen

Example.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx \tag{3}$$

Mit $u = x+1$, also $\frac{du}{dx} = 1$, $du = dx$ erfolgt die Substitution in 3 durch $x = u-1$, um die Wurzel als eine Variable $a^{\frac{1}{2}}$ darstellen zu können und einfach integrieren zu können:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (u-1)\sqrt{u}\,du \\
&= \int (u-1)\cdot u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\,du \\
&= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \qquad (4)
\end{aligned}$$

Nach Durchführung der Rücksubstitution ergibt sich aus Gleichung 4:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

So führte die Substitution auf eine einfachere Form!

Example 5. Substitution, wenn Integrale nicht als $\int g(u(x)) \cdot u'(x)\ dx$ vorliegen

Example.

$$\int \frac{1}{x^2+p}\,dx$$

für $p > 0$. Bekannt ist:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

Wie kann das gegebene Integral auf diese Form gebracht werden? Durch:

$$\int \frac{1}{x^2+p}\,dx = \frac{1}{p}\int \frac{1}{\frac{x^2}{p}+1}\,dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{\sqrt{p}}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{p}}$; $du = \frac{1}{\sqrt{p}}dx$:

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)^2+1}\frac{1}{\sqrt{p}}dx$$

Jetzt erfolgt die Substitution, mit der ein bekannter Ausdruck entsteht:

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{p}}(\arctan u + C)$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{p}} + C\right) = \frac{1}{\sqrt{p}}\arctan \frac{x}{\sqrt{p}} + C$$

C ist eine unbestimmte Integrationskonstante, ändert sich also durch Ausmultiplikation nicht!

Example 6. Substitition, wenn Integrale nicht als $\int g(u(x)) \cdot u'(x)\,dx$ vorliegen

Example.

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$$

Es wird immer versucht, durch Substitution (etwas spielerisch) eine nicht sofort zu integrierende Formel in irgendetwas geeignetes Bekanntes umzuwandeln. Bekannt ist z.B.:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

Quadratische Ergänzung der Ausgangsformel:

$$x^2+bx+c = x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

Man definiert: $p := -\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$. Also wird:

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+p}dx$$

Substitution: $u = x+\frac{b}{2}$; $\frac{du}{dx}=1$; also wird $du = dx$. Nach Substitution ist:

$$= \int \frac{1}{u^2+p}\,du$$

Nach Beispiel 4 wird:

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\arctan\frac{u}{\sqrt{p}}+C$$

Und nun die Rücksubstitution:

$$= \frac{1}{\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}\cdot\arctan\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}+C$$

Dies gilt nur für $c-\frac{b^2}{4}>0$

2.3. **Zweite Substitutionsformel.** Gelegentlich ist es sinnvoll, die Funktionsvariable x durch eine neue Funktion zu ersetzen, um etwas Integrierbares zu erhalten. Das Vorgehen ist nicht systematisch, sondern aus Erfahrung zu lernen. Beispiel:

Example 7. Integration durch Substitution mit einer Funktion

Example.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

Der sog. »trigonometrische Pythagoras« ist bekannt:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

Hier gilt:

$$\sin^2 u+\cos^2 u = 1$$
$$\cos^2 u = 1-\sin^2 u$$

Setze $x = \sin u$, daraus folgt $\frac{dx}{du} = \cos u$, $dx = \cos u\cdot du$. Nun erfolgt die Substitution von x und dx und danach Integration unter Verwendung von $\int\cos^2 u\,du = \frac{1}{2}(\cos u\cdot\sin u+u)+C$[1]:

$$\begin{aligned} = \int\sqrt{\cos^2 u}\cdot\cos u\,du &= \int\cos^2 u\,du \\ &= \frac{1}{2}(\cos u\cdot\sin u+u)+C \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\sin u+u\right)+C \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot x+\arcsin x\right)+C$$

[1] Herleitung davon über die Produktregel zum Integrieren:

$$\begin{aligned} \int\cos^2 u\,du &= \int\cos u\cdot\cos u\,du \\ &= \cos u\cdot\sin u+\int\sin^2 u\,du \end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ und Äquivalenzumformungen in Gleichungen wird:

$$\begin{aligned} \int\cos^2 u\,du &= \cos u\cdot\sin u+\int\left(1-\cos^2 u\right)\,du \\ \Rightarrow\int\cos^2 u\,du &= \cos u\cdot\sin u+u-\int\cos^2 x\,du \quad \mid +\int\cos^2 x\,du \\ \Leftrightarrow 2\int\cos^2 u\,du &= \cos u\cdot\sin u+u \quad \mid\cdot\frac{1}{2} \\ \Rightarrow\int\cos^2 u\,du &= \frac{1}{2}(\cos u\cdot\sin u+u)+C \end{aligned}$$

Formale Vorgehensweise bei der zweiten Substitutionsregel:

(1) Sei $x = g(u)$ nach u differenzierbar und nach u auflösbar.
(2) Dann ist

$$\int f(x)\ dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)\ du|_{u=g^{-1}(x)}$$

Dies ist genau die erste Substitutionsregel rückwärts gelesen. Eventuell ist nämlich der Ausdruck auf der rechten Seite einfacher integrierbar; dies zeigt sich nur durch Ausprobieren.

2.4. **Substitution bei bestimmten Integralen.** Das bestimmte Integral ist eine Zahl, das unbestimmte Integral eine Menge von Funktionen. Ein bestimmtes Integral hat Integrationsgrenzen. Zur Berechnung eines bestimmten Integrals benötigt man ggf. die Integration des unbestimmten Integrals durch Substitution. Durch geschickte Berechnung kann man ggf. auf die Rücksubstitution verzichten, nämlich: weniger Rechenarbeit durch Substitution der Integrationsgrenzen.

Example 8. Substitution der Integrationsgrenzen, vgl. Beispiel 4.

Example.

$$\int_{-1}^{3} x\sqrt{x+1}\, dx =$$

Jetzt mit $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$; $\frac{du}{dx} = 1$; $du = dx$ substituieren. Gleichzeitig werden die Integrationsgrenzen durch den Funktionswert $u(x)$ für die Integrationsgrenzen ersetzt: $u(-1) = 0$, $u(3) = 4$. Also:

$$\int_0^4 (u-1)\, u^{\frac{1}{2}}\ du = \int_0^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\ du = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{112}{15}$$

Ziel bei der Substitution ist es, überall x und dx zu entfernen.

Example 9. Substitution der Integrationsgrenzen.

Example. Bei folgendem Beispiel geht es um die Berechnung der Fläche desjenigen Viertels des Einheitskreises, das im 1. Quadranten liegt.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

Substitution mit $x = \sin u$, $\frac{dx}{du} = \cos u$, $dx = \cos u \cdot du$. $u = \arcsin x$.

Dabei Substitution der Integrationsgrenzen durch:

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = \frac{\pi}{2}$$

Also:

$$\begin{aligned} = \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u\, du \quad &= \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du \\ &= \quad \left[\frac{1}{2}(\sin u \cdot \cos u + u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \quad \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2.5. **Integration durch Partialbruchzerlegung.** Es geht um die Integration von gebrochen rationalen Funktionen, z.B.

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx$$

mit $Z(x)$ Zählerpolynom, $N(x)$ Nennerpolynom.

Ist der Grad von $Z(x)$ größer oder gleich $N(x)$, so muss zuerst eine Polynomdivision durchgeführt werden. Dadurch wird:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = p(x) + \frac{Z_1(x)}{N(x)}$$

Dabei ist der Grad von $Z_1(x)$ echt kleiner als der von $N(x)$. $p(x)$ ist ein normales Polynom, das einfach integriert werden kann; das gebrochen rationale Polynom wurde also zerlegt in ein ganzrationales Polynom und einen gebrochenrationalen Rest. Beispiel für Polynomdivision (ohne Zwischenschritte), bei dem ein Rest bleibt, in dem der Anteil im Zähler einen Grad hat, der echt kleiner ist als der im Nenner:

$$\left(x^3+x^2-x+3\right) : \left(x^2+x-2\right) = x + \frac{x+3}{x^2+x-2}$$

Nun versucht man, den Restbruch $\int \frac{Z_1(x)}{N(x)}$ auf Summen von sechs Grundtypen umzuformen, die leicht zu integrieren sind:

a-1: $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$. Hier steht im Zähler die Ableitung des Nenners, diese Integration ist also durch die erste Substitutionsformel einfach möglich.

a-2: $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$ mit $n > 1$

b-1: $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx = \ln\left|x^2+bx+c\right| + C$. Hier steht im Zähler die Ableitung des Nenners, diese Integration ist also durch die erste Substitutionsformel einfach möglich.

b-2: $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{\left(x^2+bx+c\right)^{-n+1}}{-n+1} + C$ mit $n > 1$

c-1: $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \cdot \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + C$ für $c - \frac{b^2}{4} > 0$, wodurch das Polynom x^2+bx+c nur komplexe Nullstellen hat. Diese Integration wurde in den Substitutionsregeln bewiesen.

c-2: $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \left(c-\frac{b^2}{4}\right)^{-n+\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$. Die Integration des Integrals auf der rechten Seite ist nach der Produktregel (mit »Rekursionsformel«) möglich. Mit $t = \frac{x+\frac{b}{2}}{c-\frac{b^2}{4}}$, weil Substitution durchgeführt wurde. Dieser sechste Fall kommt in dieser Vorlesung jedoch nicht vor.

Allgemeine Vorgehensweise zur Integration gebrochen rationaler Funktionen:

(1) Nullstellen des Nennerpolynoms $N(x)$ berechnen und $N(x)$ in lineare und unzerlegbare quadratische Faktoren zerlegen. Nach dem Hauptsatz der Algebra ist ja jedes Polynom im Bereich der Komplexen Zahlen vollständig in Linearfaktoen zerlegbar, im Bereich $\mathbb{R}$ kommen ggf. noch quadratische nicht in $\mathbb{R}$ zerlegbare Faktoren vor. Also wird

$$N(x) = \ldots \cdot (x-a)^k \cdot \ldots \cdot \left(x^2+px+q\right)^l \cdot \ldots$$

(2) Partialbruch-Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{Z(x)}{\ldots \cdot (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots} = \ldots \quad &+ \quad \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_K}{(x-a)^k} + \ldots \\ &+ \quad \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}\end{aligned}$$

Das Zählerpolynom $Z(x)$ wurde dabei in unbekannte Koeffizienten und lineare Gleichungen mit Koeffizienten im Nenner aufgeteilt, die im nächsten Teilschritt berechnet werden:

(3) Jetzt wird die gesamte Gleichung mit dem Hauptnenner $N(x)$ in seiner in Linearfaktoren zerlegten Form multipliziert; dadurch fällt der Nenner auf der linken Seite weg, auf der rechten Seite kürzen sich Teile weg. Nun können die Koeffizienten A_1, A_2 usw. ausgerechnet werden.

(4) Integration der Partialbruchzerlegung. Die Partialbrüche entstehen aus dem Partialbruchansatz nach Einsetzen der berechneten Koeffizienten.

Example 10. Integration durch Partialbruchzerlegung

Example.

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

(1) Schritt: Nullstellen des Nennerpolynoms. Gibt es Nullstellen des Nenners $N(x)$? Ja, nach der pq-Formel ist $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Erst wenn diese Nullstellen berechnet wurden, kann $N(x)$ in die Linarfaktoren zerlegt werden: $N(x) = (x+2)(x-1)$.

(2) Partialbruchansatz.

$$\frac{x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{x-1}$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $N(x) = (x+2)(x-1)$:

$$x+3 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)$$

(3) Berechnung der Koeffizienten A, B: dazu werden die Nullstellen von $N(x)$ in die letzte Gleichung eingesetzt.

Für $x = -2$ wird: $1 = A \cdot (-3) + B \cdot 0$, also $A = -\frac{1}{3}$.

Für $x = 1$ wird: $4 = A \cdot 0 + B \cdot 3$, also $B = \frac{4}{3}$.

(4) Integration der Partialbruchzerlegung: Dazu werden im Partialbruchansatz die Koeffizienten durch die ausgerechneten Werte ersetzt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx &= \int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,dx \\
&= \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\,dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x-1}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{4}{3}\ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

Diese Partialbruchzerlegung ist also zurückzuführen auf die Integration eines Bruches vom Typ a-1 (siehe 2.5).

Example 11. Integration durch Partialbruchzerlegung

Example.

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

(1) Nullstellen von $N(x)$ und Linearfaktorenzerlegung: siehe Aufgabenstellung

(2) Partialbruchansatz

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $N(x)$:

$$x^2+2 = A_1 \cdot (x-1)^2 + A_2 \cdot (x-1) + A_3$$

(3) Bestimmung der Koeffizienten A_1 bis A_3.

Man setzt die dreifache Nullstelle $x = 1$ ein: $3 = A_3$. Es existiert nur eine unterschiedliche Nullstelle, aber noch zwei Unbekannte. Man muss also weitere (möglichst günstige, aber eigentlich beliebige) Werte wählen, um sie in die letzte Gleichung einzusetzen, nämlich entsprechend der Anzahl der Unbekannten. Also:

Für $x = 0$: $2 = A_1 - A_2 + 3$ und

Für $x = 2$: $6 = A_1 + A_2 + 3$.

Die Lösungen dieses LGS sind $A_1 = 1$ und $A_2 = 2$.

(4) Integration der Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Z(x)}{N(x)}dx &= \int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx \\
&= \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^3}\,dx \\
&= ln\,|x-1| - 2 \cdot (x-1)^{-1} - \frac{3}{2}(x-1)^{-2} + C
\end{aligned}$$

Example 12. Integration durch Partialbruchzerlegung

Example.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

(1) Nullstellen des Nennerpolynoms $N(x)$: Probieren liefert $x_1 = 1$. Nun erfolgt Polynomdivision (hier ohne Zwischenschritte):

$$\left(x^3 + x^2 - 2\right) : (x-1) = x^2 + 2x + 2$$

Die Polynomdivision ist aufgegangen, eben weil $x_1 = 1$ eine Nullstelle war. Die weiteren Nullstellen sind nach der pq-Formel komplex:

$$x_{2|3} = -1 \pm \sqrt{1-2}$$

Damit wird die Zerlegung des Nennerpolynoms in lineare und quadratische Faktoren:

$$N(x) = (x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right)$$

(2) Partialbruchansatz

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $N(x)$ wird:

$$x + 1 = A\left(x^2 + 2x + 2\right) + (Bx + C)(x-1)$$

(3) Berechnung der Koeffizienten: Wie gewöhnlich werden zuerst die Nullstellen eingesetzt:für $x = 1$ wird $2 = A \cdot 5 \Leftrightarrow A = \frac{2}{5}$. Nun müssen noch so viele weitere Werte eingesetzt werden, wie noch Unbekannte vorhanden sind: (eine weitere Möglichkeit der Berechnung wäre der sog. Koeffizientenvergleich) Für einfaches Rechnen bietet sich immer $x = 0$ an: $1 = A \cdot 2 + C \cdot (-1) \Leftrightarrow C = -\frac{1}{5}$. Und weiter für $x = -1:$ $0 = A + (-B + C)(-2) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{5} + 2B + \frac{2}{5} \Leftrightarrow B = -\frac{2}{5}$.

(4) Integration der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx &= \int \frac{x+1}{x^3+x^2-2}\,dx \\ &= \int \frac{\frac{2}{5}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2+2x+2}\,dx \\ &= \frac{2}{5}\ln|x-1| + g(x)\end{aligned}$$

Um $g(x) = \int \frac{-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}}{x^2+2x+2}dx$ zu berechnen, muss dieser Bruch auf einen der oben aufgelisteten Grundtypen gebracht werden; er ist dem Grundtyp b-1 ($\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln\left|x^2+bx+c\right| + C$) ähnlich. Also:

$$g(x) = -\frac{1}{5}\int \frac{2x+1+1-1}{x^2+2x+2}\,dx$$

Durch Addition und anschließende Subtraktion von 1 soll erreicht werden, dass die Form b-1 erreicht wird:

$$g(x) = -\frac{1}{5}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx\right)$$

Nun erfolgt Integration, wobei der zweite Summand dem Grundtyp c-1 entspricht:

$$= -\frac{1}{5}\left(\ln\left|x^2+2x+2\right| - \arctan(x+1)\right) + C$$

Nach Einsetzen dieses Integrals für $g(x)$ ergibt sich:

$$\frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{1}{5}\arctan(x+1) + C$$

Example 13. Integration durch Partialbruchzerlegung

Example.

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

(1) Nullstellen von $N(x)$: nicht notwendig, da bereits vollständig zerlegt in lineare und quadratische Faktoren und der quadatische Faktor nach vorigem Beispiel nur komplexe Nullstellen hat.

(2) Partialbruchansatz

$$\frac{x^2+2x-1}{N(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2}$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$\begin{aligned}\left(x^2+2x-1\right) &= A\,(x+1)\left(x^2+2x+2\right)\\ &+ B\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+2x+2\right)\\ &+ C\,(x-1)\left(x^2+2x+2\right)\\ &+ (Dx+E)\,(x-1)\,(x+1)^2\end{aligned}$$

(3) Berechnung der Koeffizienten. Zuerst setzt man (wie gewöhlich) die beiden Nullstellen ein, weil so der Rechenaufwand gering ist, danach noch drei weitere Werte zusammen mit den schon berechneten Koeffizienten, weil insgesamt 5 Unbekannte vorhanden sind:

$x=1$**:** $2=A\cdot 4\cdot 5\Rightarrow A=\frac{1}{10}$
$x=-1$**:** $-2=C\cdot(-2)\Rightarrow C=1$
$x=0$**:** $\frac{4}{5}=-2B-E$
$x=-2$**:**

$$\begin{aligned}-1 &= \frac{1}{10}\cdot 2+B\,(-3)\,(-1)\cdot 2+1\,(-3)\cdot 2+(-20+E)\,(-3)\\ \frac{24}{5} &= 6B+6D-3E\end{aligned}$$

$x=2$**:** $-12=30B+18D+9E$

Als Rest bleibt nun ein lineares 3/3-Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrrr}\frac{4}{5} & = & -2B & & -E\\ \frac{24}{5} & = & 6B & +6D & -3E\\ -12 & = & 30B & +18D & +9E\end{array}$$

Aufgelöst nach dem Gauß-Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{array}{rcccc}\frac{1}{2} & = & B & & \\ -\frac{3}{5} & = & & D & \\ -\frac{9}{5} & = & & & E\end{array}$$

(4) Integration

$$\begin{aligned}\int\frac{Z(x)}{N(x)}\,dx &= \int\frac{\frac{1}{10}}{x-1}\,dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}+\int\frac{-\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{10}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-(x+1)^{-1}+g(x)+C\end{aligned}$$

Dabei ist das Integral $g(x)$, wenn wir es auf den Grundtyp b-1 umformen:

$$\begin{aligned}g(x) &= \int\frac{-\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= -\frac{3}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x+2+4}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= -\frac{3}{10}\left(\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int\frac{4}{x^2+2x+2}\,dx\right)\\ &= -\frac{3}{10}\left(\ln\left|x^2+2x+2\right|+4\arctan(x+1)\right)+C\end{aligned}$$

Und nach Einsetzen des Ergebnisses $g(x)$:

$$\int\frac{Z(x)}{N(x)}\,dx=\frac{1}{10}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-(x+1)^{-1}-\frac{3}{10}\left(\ln\left|x^2+2x+2\right|+4\arctan(x+1)\right)+C$$

Dieses Beispiel repräsentiert die höchste Komplexität bei der Integration, die in der Vorlesung Mathematik 2 vorkommt.

3. Uneigentliche Integrale

Hier wird der Integrationsbegriff auf unbeschränkte Integrale (in unendlichen Grenzen) und Integranden (die unendliche Werte annehmen) erweitert[2].

Example 14. Integration eines uneigentlichen Integrals

[2]Dieses Thema kommt aller Wahrscheinlichkeit nach in der Klausur vor (Insidertipp aus höherem Semester)!

Example.

$$y = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 1. uneigentliches Integral mit einseitig unendlicher Grenze

Siehe Abbildung 1. Die Frage bei dieser Funktion, die sich asymptotisch der x-Achse annähert ist, ob die Fläche F unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[1; \infty)$ endlich ist? Wie findet man das heraus?

(1) Wähle eine Variable b. b steht für einen festen Wert rechts von 1.
(2) Bilde das bestimmte Integral
$$\int_1^b f(x)\ dx = F(b)$$
(3) Untersuche, ob $\lim_{b\to\infty} F(b)$ existiert. Sollte dieser Grenzwert existieren, ist er ja die Maßzahl der Fläche unter der Kurve.

Am Beispiel:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \left(-\frac{1}{b}\right) - (-1)$$

Existiert nun der Grenzwert?

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + 1 = 1$$

Ja, also ist die Flächenmaßzahl für dieses Integrals 1cm^2, sofern als Einheit beim Zeichnen der Funktion 1cm gewählt wurde.

Definition 1. Sei $f(x)$ über jedem Integral mit den Grenzen $[a; b]$ mit $b \in [a; \infty)$ integrierbar. Es existiere $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$. Dann heißt dieser Grenzwert uneigentliches Integral von $f(x)$ über $[a; \infty)$, in Zeichen:

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

Analog sind definiert

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\ dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\ dx$$

Dabei kann c beliebig gewählt werden, aber man wählt es natürlich günstig, um den Rechenaufwand zu minimieren.

Example 15. Integration eines uneigentlichen Integrals

Example.

$$\int_{-\infty}^0 e^x\ dx$$

Mit der gewählten Hilfsvariable a ist das zugehörige bestimmte Integral:

$$\int_a^0 e^x\ dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

Und das ursprüngliche Integral ist deshalb:

$$\int_{-\infty}^0 e^x\ dx = \lim_{a\to-\infty} [1 - e^a] = 1$$

denn $\lim_{a\to-\infty} e^a = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und hat den Wert 1.

Example 16. Integration eines uneigentlichen Integrals

Example.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Ist die Fläche unter dieser Kurve in diesen Grenzen endlich? Das Integral mit Hilfsvariablen, um eine Stammfunktion zu berechnen:

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\arctan x]_a^b$$

Als Hilfswert wählt man $c = 0$, denn $\arctan(0) = 0$. Also:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx &= \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\arctan x]_a^c + \lim_{b\to\infty} [\arctan x]_c^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} [0 - \arctan a] + \lim_{b\to\infty} [\arctan b - 0] \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Definition 2. Integrale über Funktionen mit unbeschränktem Integranden

Definition. Sei $f(x)$ für $x = x_0$ unbeschränkt. D.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Dies ist zum Beispiel der Fall an Polstellen oder an Polstellen, deren einer Ast gegen ∞, der andere gegen $-\infty$ geht.

Sei $x_0 < a < b$. Es existiere der Grenzwert

$$\lim_{a\to x_0} \int_a^b f(x)\ dx$$

Dann heißt dieser Grenzwert uneigentliches Integral von $f(x)$ über $[x_0; b]$, in Zeichen

$$\int_{x_0}^b f(x)\ dx := \lim_{a\to x_0} \int_a^b f(x)\ dx$$

Analog ist für $a < b < x_o$:

$$\int_a^{x_0} f(x)\ dx := \lim_{b\to x_0} \int_a^b f(x)\ dx$$

Example 17. Integration eines Integrals mit unbeschränktem Integranden

Example.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

Dieses Integral ist deshalb ein uneigentliches Integral, weil die Integrationsgrenze 0 nicht eingesetzt werden kann. Die Frage nach der Fläche unter der Kurve ist nur sinnvoll, wenn die Funktion ansonsten zwischen diesen Grenzen vollständig definiert ist. Dies ist der Fall, vergleiche die grafische Veranschaulichung. Diese Funktion hat bei $x_0 = 0$ eine Unendlichkeitsstelle. Nun wähle man eine Zahl $a < x_0$ und integriere:

$$\int_{-1}^{a} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{a} = \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}$$

Und nun das Integral mit dem Grenzwert für $a \to 0$:

$$\int_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \lim_{a\to 0} \left[\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right] = -\frac{3}{2}$$

Dieses uneigentliche Integral existiert also und hat den Wert $-\frac{3}{2}$, denn das Integral liegt ja unterhalb der x-Achse.

Example 18. Integration eines Integrals mit unbeschränktem Integranden

Example.

$$\int_2^3 \frac{1}{x-3}\, dx$$

Auch diese Frage ist sinnvoll, denn 3 als Integrationsgrenze kann nicht eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}\int_2^b \frac{1}{x-3}\,dx &= [\ln|x-3|]_2^b \\ &= \ln|b-3| - \ln|2-3| \\ &= \ln|b-3| - \ln|-1| \\ &= \ln|b-3| - \ln(0) \\ &= \ln|b-3|\end{aligned}$$

Und jetzt muss der Grenzwert dieses Integrals berechnet werden:

$$\lim_{b\to 3}\int_2^b \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{b\to 3}\ln|b-3| = -\infty$$

Das uneigentliche Integral $\int_2^3 \frac{1}{x-3}\,dx$ existiert also nicht. Es ist zwar ähnlich zu vorigem Beispiel, aber die Funktion verläuft nicht steil genug.

Example 19. Anwendung: Die Anziehungskraft auf einen Massepunkt m im Erdfeld

Example.

$$F = \gamma\cdot\frac{m_E\cdot m}{r^2}$$

F**::** Kraft; $[F] = 1N$
γ**::** Gravitationskonstante; $\gamma = 6,67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$; auch oft mit f bezeichnet.
m_E**::** Masse der Erde.
m**::** Masse des Massenpuktes
r**::** $r = r_1 - r_0$ mit Abstand der Massemittelpunkte r_1 und Erdradius r_0.

Arbeit als Integral im Diagramm F/r (Kraft gegen Weg), um m von r_0 (der Erdoberfläche) nach r_1 zu bringen:

$$A = \int_{r_0}^{r_1}\gamma\cdot\frac{m_E\cdot m}{r^2}\,dx = \gamma\cdot m_E\cdot m\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)$$

Die Arbeit A_∞, damit m die Erdanziehung verlässt, d.h. um einen Massepunkt ins Unendliche zu befördern, ist damit:

$$A_\infty = \int_{r_0}^{\infty}\gamma\cdot\frac{m_E\cdot m}{r^2}\,dx = \gamma\cdot m_E\cdot m\cdot\frac{1}{r_0}$$

Wie groß muss die Startgeschwindigkeit einer Rakete sein, damit sie die Erdanziehung verlässt? Die kinetische Energie muss gleich A sein:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \gamma\frac{mm_E}{r_0}$$

also

$$v_0 = \sqrt{\frac{2m_E\gamma}{r_0}}$$

und als Zahlenwert ist $v_0 = 11,2\frac{km}{s}$.

4. Numerische Integration

Auch »numerische Quadratur« genannt. Funktionen in Anwendungsfällen lassen sich im Normalfall nicht symbolisch integrieren, also muss man numerische Methoden anwenden.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 2. Numerische Integration durch Approximation mit Rechtecken

4.1. **Rechteckssumme.** Dies ist die einfachste Möglichkeit - vergleiche dazu Abbildung 2. Sie wurde zur Definition des Integrals genutzt. Es ist die Approximation des bestimmten Integrals durch eine Summe von Rechtecksflächen. Man teilt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in lauter Rechtecke der Breite $\frac{b-a}{n} = \Delta x$. Wähle nun eine Zahl ξ_i beliebig aus $\xi_i\in[x_i;x_{i+1}]$ als angenäherte (!) Höhe eines Rechtecks, für jedes Rechteck einzeln.

Den Ausgleich überlässt man dem Zufall, es bleibt eine Näherungslösung. Man kann auch den Mittelwert aus Unter- und Obersumme bilden usw. Die Fläche eines Rechtecks wird dann: $f(\xi_i) \cdot \Delta x$. Die Näherung für das ganze Integral ergibt sich dann zu:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x$$

Für $\xi_i = x_i$ (frei so gewählt) ergibt sich als Formel:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ konvergiert die Approximation des Integrals gegen das Integral.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 3. Numerische Integration durch Approximation mit Trapezflächen

4.2. **Trapezregel.** Dies ist die Approximation des Integrals durch eine Summe von Trapezflächen, d.h. mit Hilfe von vielen Sekanten. Die Fläche eines Trapezes (siehe Abbildung 3) ist:

$$A_T = \Delta x \cdot m = \Delta x \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

m heißt dabei Mittellinie des Trapezes. Die Approximationsformel ist:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) \cdot \Delta x \\ &= \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Diese Approximation über Kantenzüge ist weit besser als die über Treppenfunktionen (die Rechtecksumme), obwohl die Formeln sich nicht wesentlich unterscheiden. Die logische Fortführung ist also die Approximation über Kurven, hier über eine Normalparabel durch drei Punkte, die sog. Simpson-Formel.

4.3. **Simpsonverfahren**[3]**.** Approximation des bestimmten Integrals durch eine Summe von Parabelflächen, wie in Abbildung 4.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 4. Numerische Integration durch Approximation mit Parabelflächen

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 5. Festlegung einer Parabel durch drei Punkte

Vorbereitung: Eine quadratische Parabel ist durch drei Punkte eindeutig bestimmt: siehe Abbildung 5. Die x-Werte der drei Punkte sollen den gleichen Abstand voneinander haben. Da wir nur die Fläche unter dem gegebenen Parabelstück berechnen wollen, verschieben wir das Flächenstück so, dass $i = 0$, also dass der mittlere Punkt genau auf der y-Achse liegt (vergleiche Abbildung 6). Aus den drei Punkten $(-h; y_{-h})$, $(0; y_0)$,

[3]Kommt mit guter Wahrscheinlichkeit in der Klausur vor!

$(+h; y_{+h})$ auf der Parabel ergibt sich durch Einsetzen in die allgemeine Parabelgleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ein $3 \mid 3$-LGS zur Berechnung der drei Koeffizienten a_0, a_1, a_2:

$$\begin{aligned} y_{+h} &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ y_0 &= a_0 \\ y_{-h} &= a_0 - a_1 h + a_2 h^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 6. Günstige Verschiebung eines Parabelstücks

Die Gleichung der Parabel ist jedoch uninteressant, also auch a_0, a_1, a_2. Interessant für uns ist die Fläche unter der Parabel im Bereich $[-h; +h]$.

Definition 3. Keplersche Fassregel

Definition. Für die Näherungsparabel $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ gilt

$$\int_{-h}^{h} p(x)\ dx = \frac{h}{3}\left(y_{-h} + 4y_0 + y_{+h}\right) \tag{6}$$

Diese Gleichung wird Keplersche Fassregel genannt, manchmal auch schon Simpsonformel.

Beweis von Definition 3:

- Einerseits gilt für die Fläche über $[-h, h]$, als Auflösung der linken Seite der Keplerschen Fassregel:
$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} p(x)\ dx &= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{h} \\ &= 2a_0 h + a_2 \frac{h^3}{3} \end{aligned}$$
- Andererseits gilt für die Fläche über $[-h, h]$, als Auflösung der rechten Seite der Keplerschen Fassregel unter Verwendung des Gleichungssystems 5:
$$\begin{aligned} \frac{h}{3}\left(y_{-h} + 4y_0 + y_{+h}\right) &= \frac{h}{3}\left(a_0 - a_1 h + a_2 h^2 + 4a_0 + a_0 + a_1 h + a_2 h^2\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(6a_0 + 2a_2 h^2\right) \\ &= 2a_0 h + 2a_2 \frac{h^3}{3} \end{aligned}$$

Da nun beide Seiten der Gleichung nach ihrer Auflösung identisch sind, ist die Gleichung 6 bewiesen. Dies gilt für beliebige drei Punkte, nicht nur für die betrachtete spezielle Figur, da ja Verschiebungen der Figur nach rechts und links für die Fläche keine Auswirkungen haben und deshalb auch nur die y-Werte in der Keplerschen Fassregel auftauchen: für die Gleichung 6 spielt die spezielle Wahl des Koordinatensystems keine Rolle, man benötigt nur drei Funktionswerte. Dafür werden neue Bezeichnungen festgelegt: y_{-h} wird $f(x_0 - h)$, y_0 wird $f(x_0)$, y_{+h} wird $f(x_0 + h)$.

Anwendung der Keplerschen Fassregel: (siehe Abbildung 7)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 7. Anwendung der Keplerschen Fassregel zur numerischen Integration

(1) Teile $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle, wobei n gerade sein muss (!).

(2) Nun wird sukzessive das Flächenstück unter je drei benachbarten Punkten mit der Keplerschen Fassregel integriert. Dazu wird für je drei benachbarte Punkte $f(x)$ durch eine Parabel approximiert. Also:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\ dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\ dx$$

ist die Zerlegung des Integrals. Nun wird approximiert.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &\approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \ldots \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n]\end{aligned}$$

Dies ist die sog. Simpsonformel. Es gilt hier: $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ und n gerade. Die Simpsonformel konvergiert schneller (für größeres n, gegen den Wert des Integrals) als die Trapezformel und jede Rechteckssumme. D.h.: Bei gleicher Punktanzahl $n+1$ liefert die Simpsonformel das genaueste Ergebnis. Die Simpsonformel liefert genaue, nicht genäherte Ergebnisse für Polynome bis zum Grad 3. Die Trapezregel liefert genaue Ergebnisse nur für Polynome ersten Grades, d.i. für Geraden.

5. Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung

Diese Verfahren sind anwendbar, wenn eine Funktion stetig ist; sie muss nicht differenzierbar sein!

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 8. Nullstellenbestimmung durch Intervallhalbierung (Bisektion)

5.1. **Intervallhalbierung (Bisektion).** (siehe Abbildung 8) Man wähle zwei x-Werte a, b, für die die Funktionswerte $f(a)$, $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Nun bestimmt man die Intervallmitte $x = \frac{a+b}{2}$ als Näherung der Nullstelle. Genügt diese Näherung nicht, setzt man $a = x$ bzw. $b = x$, so dass wieder gilt: $f(a) \cdot f(b) < 0$ und wiederhole den Schritt. So ergibt sich eine sukzessive Näherung. Formuliert als Algorithmus:

```
/* Einlesen von a,b */
  cin >> a,b; /* mit f(a)*f(b)<0 */
  label:
    x=(a+b)/2;
    cout << x;
    if (hinreichend genau) exit;
    if (f(a)*f(x)<0) {
       b=x;
       goto label;
    }
    if (f(b)*f(x)<0) {
       a=x;
       goto label;
    }
```

Dieses Verfahren funktioniert nicht bei $f(x) = x^2$, d.h. bei doppelten Nullstellen. Die Genauigkeit reicht aus, wenn zwischen verschiedenen Iterationsstufen nur noch Schwankungen bei bestimmten Nachkommastellen auftreten oder sich eine Periode entwickelt.

5.2. **Regula falsi (Sekantenverfahren).** Dieses Verfahren liefert schneller gute Näherungswerte als das Verfahren durch Intervallhalbierung. Verfahren:

(1) Wähle a, b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.
(2) lege Sekante durch $P_1(a \mid f(a))$ und $P_2(b \mid f(b))$.
(3) Berechne Schnittpunkt x der Sekante mit der x-Achse als Näherung der Nullstelle.
(4) Wenn die Genauigkeit noch nicht ausreicht: Setze $a = x$ bzw. $b = x$, so dass wieder $f(a) \cdot f(b) < 0$, und wiederhole Schritte 2 und 3.

Gleichung der Sekante, entwickelt aus zwei Berechnungen der Steigung der Sekante über das Steigungsdreieck, siehe Abbildung 9:

$$\begin{aligned} \frac{y - f(a)}{x - a} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

Der y-Wert der Nullstelle x ist 0, also:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ \Leftrightarrow x &= a - \frac{f(a) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)} \end{aligned}$$

So kann der Näherungswert x der Nullstelle berechnet werden. Als Algorithmus:

```
/* Einlesen von a,b */
  cin >> a,b; /* mit f(a)*f(b)<0 */
  label:
    x=a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a));
    cout << x;
    if (hinreichend genau) exit;
    if (f(a)*f(x)<0) {
       b=x;
       goto label;
    }
    if (f(b)*f(x)<0) {
       a=x;
       goto label;
    }
```

5.3. **Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren).** Dieses Verfahren ist in Abbildung 10 dargestellt. Von den drei vorgestellten Verfahren konvergiert es am schnellsten. Außer bei doppelten Nullstellen (d.h. $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, wo das Verfahren so langsam ist wie die Bisektion) und besonderen Situationen, bei denen das Verfahren nicht endet (siehe Abbildung 11, wo man immer nur zwischen den beiden Nullstellen hin- und herpendelt). Bei diesem Verfahren muss die Funktion differenzierbar sein. Verfahren:

(1) Wähle a

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 9. Nullstellenbestimmung durch Regula Falsi (Sekantenverfahren)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 10. Nullstellenbestimmung durch Newton-Verfahren (Tangenten-Verfahren)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 11. Mit dem Newton-Verfahren nicht bestimmbare Nullstellen

(2) Lege durch $(a \mid f(a))$ die Tangente an $f(x)$. Tangentengleichung in Punktsteigungsform:

$$\begin{aligned} \frac{y - f(a)}{x - a} &= f'(a) \\ \Leftrightarrow y &= f'(a)(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

(3) Berechne Schnittpunkt x der Tangente mit der x-Achse als Näherung der Nullstelle. Dazu wird die Tangentengleichung 0 gesetzt, um den Schnittpunkt mit der x-Achse als Näherungswert der Nullstelle zu berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ \Leftrightarrow x &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

Diese Formel zur Berechnung des Näherungswertes der Nullstelle wird formuliert als sog. Iterationsfunktion des Newtonverfahrens:

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(4) Wenn die Genauigkeit nicht ausreicht: Setze $a = x$ und wiederhole Schritt 2 und 3. Das heißt unter Verwendung der Iterationsfunktion: setze $g(x)$ als x in $g(x)$ ein (Iterieren).

Und der Algorithmus:

```
cin >> a; // a moeglichst nahe bei der Nullstelle!
  label:
    x=a*f(a)/f'(a);
    cout << x;
    if (hinreichend genau) exit;
    a=x;
    goto label;
```

6. Volumen eines Rotationskörpers

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 12. Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

6.1. Rotation um die x-Achse. (siehe Abbildung 12)

$y = f(x)$ rotiere um die x-Achse. Es entsteht eine Art Becher. Was ist das Volumen? Dazu:

(1) Zerlege den Rotationskörper in Scheiben der Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
(2) Das Volumen einer Scheibe ist über das Volumen eines Zylinders annäherbar (siehe auch Rechteckssumme). In Abbildung 12 werde in jedem Intervall Δx eine beliebige Zahl ξ_i gewählt, als Näherung des Radius einer Scheibe. Volumen eines Scheibenelements:

$$\Delta V = A \cdot h = \pi r^2 \cdot \Delta x = \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x$$

(3) Als Näherung für das Volumen des Drehkörpers ergibt sich:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ darf statt dem Summenzeichen ein Integralzeichen gecshrieben werden (Integral als Grenzwert bei unendlich dünnen Scheiben):

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

V_x meint: es handelt sich um das Volumen einer Kurve bei Rotation um die x-Achse.

6.2. **Rotation um die y-Achse.** (siehe Abbildung 13)

Die Funktion ist eineindeutig, also löst man sie auf zu $x = g(y)$.

Analog zur Berechung des Volumens von Drehkörpern um die x-Achse ergibt sich durch Vertauschen von x und y:

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\ dy = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

Die Integrationsgrenzen c, d sind $c = f(a)$, $d = f(b)$, beschreiben also die Grenzen des Rotationskörpers auf der y-Achse. Für $g(y)$ schreibt man kurz x, so wie man für $f(x)$ auch y schreibt.

Example 20. Rotationskörper um die x-Achse

Example. Gegeben sei das Kurvenstück $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Es rotiere um die x-Achse. Für das Volumen ergibt sich (zur Integration vergleiche Fußnote zu Beispiel 7):

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

Hätte man alles in der Einheit $1cm$ gemessen, so wäre das Volumen jetzt $V_x = \frac{\pi^2}{4}\mathrm{cm}^3$.

Example 21. Volumen einer Kalotte

Example. (siehe Abbildung 14) Die Kreisgleichung hat die Formel $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ oberhalb der x-Achse und $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$unterhalb der x-Achse. Hier wird nur eine Kalotte der Höhe h betrachtet, d.h. $x \in [r - h; r]$. Ihr Volumen ist gleich dem Volumen bei Rotation eines Kreisabschnittes der Höhe h um die x-Achse:

$$\begin{aligned}
V_{kal} &= \pi \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^2\, dx \\
&= \pi \int_{r-h}^{r} r^2 - x^2\, dx \\
&= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{r-h}^{r} \\
&= \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) \\
&= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist das Halbkugelvolumen (V_{kal} für $h = r$): $V_{kal} = \pi r^2 \left(r - \frac{r}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} r^3$

Und das Vollkugelvolumen (V_{kal} für $h = 2r$): $V_{kal} = 4\pi r^2 \left(r - \frac{2r}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} r^3$

7. Bogenlänge einer Kurve

(siehe Abbildung 15)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 13. Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die y-Achse

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 14. Rotationsvolumen einer Kugelkalotte

Um die Bogenlänge über einem Intervall $[a, b]$ zu berechnen, teilt man wieder in kleine Intervalle Δx ein und nähert die Bogenlänge Δs über dem Intervall Δx durch den Satz des Pythagoras an:

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Vereinbarung:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$$

Daraus folgt die Definition:

$$\Delta y := y(x_i) - y(x_{i-1})$$

Die oben angegebene Teilbogenlänge beträgt für beliebiges Δs_i bei konstantem Δx:

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Also ist die Näherungsformel für die gesamte Bogenlänge:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ kann das Summenzeichen als Integral geschrieben werden; der Differenzenquotient unter dem Wurzelzeichen kann dann als eine Ableitung geschrieben werden; daraus folgt andererseits, dass $f(x)$ stetig differenzierbar sein muss, damit die Formel angewandt werden kann. Das Integral über einer Wurzel kann selten genau symbolisch bestimmt werden.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Example 22. Berechnung der Bogenlänge

Example. Gegeben ist die Neil'sche Parabel $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $x \in [0; 3]$. Die Ableitung ergibt sich zu $y' = x^{\frac{1}{2}}$. Die Bogenlänge ist nach der oben angegebenen Formel:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx \\ &= \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Example 23. Berechnung der Länge des Halbkreisbogens

Example. (siehe Abbildung 16) Der Radius sei R. Die Formel des Halbkreises oberhalb der x-Achse ist $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Die Ableitung ergibt sich zu: $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Diese wird in die Formel zur Berechnung der

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 15. Bogenlänge einer Kurve

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 16. Bogenlänge eines Halbkreises

Bogenlänge eingesetzt:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-R}^{R} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \\ &= \int_{-R}^{R} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx \end{aligned}$$

Bei Symmetrie zur y-Achse (Mittelachse des Intervalls) kann oft mit Vorteil ersetzt werden durch die zweifache Bogenlänge über dem halben Intervall:

$$s = 2\int_{0}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

Integriert wird durch Substitution mit einer Funktion (zweite Substitutionsformel):

- substituiere $x = R\sin t$
- daraus folgt $\frac{dx}{dt} = R\cos t$, $dx = R\cos t \cdot dt$
- Um die Rücksubstitution zu sparen, ersetzt man auch sie Integrationsgrenzen entsprechend $x = R\sin t \Leftrightarrow t = \arcsin\frac{x}{R}$:

$$\begin{aligned} t(R) &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ t(0) &= \arcsin 0 = 0 \end{aligned}$$

- Integration:

$$\begin{aligned} s &= 2\int_{t(0)}^{t(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}} R\cdot\cos t\cdot dt \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\cdot dt = R\pi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Umfang des Vollkreises zu

$$U = 2\pi R$$

8. Mantelfläche eines Rotationskörpers

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 17. Mantelfläche eines Rotationskörpers

Gesucht ist die von einem Kurvenbogen erzeugte Drehfläche, ohne die Stirnseitenflächen (siehe Abbildung 17). Dazu zerlege man den Drehkörper in Scheiben der Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die Mantelfläche des Rotationskörpers wird nun angenähert über die Mantelflächen der einzelnen Scheiben; diese sind:

$$\Delta O \approx 2\pi f(\xi_i)\cdot\Delta s_i \approx 2\pi f(\xi_i)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

Dabei ist Δs_i gleich der angenäherten Kurvenlänge im Intervall $[x_{i-1}; x_i]$. Siehe Kapitel 7. Die Mantelfläche beträgt damit näherungsweise:

$$O \approx 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

Und genau für $\Delta x \to 0$:

$$O = 2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Example 24. Mantelfläche eines Rotationskörpers

Example. $y=\frac{1}{3}x^3$, $x\in[0;1]$, $y'=x^2$

$$\begin{aligned} O &= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+x^4}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\pi\int_0^1 x^3\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{4}{27}\pi\left(\sqrt{8}-1\right) \end{aligned}$$

Die Integration erfolgte durch Substitution $u=1+x^4$, $\frac{du}{dx}=3x^3\Leftrightarrow 3x^3dx=du$.

Example 25. Die Oberfläche einer Kugel

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 18. Kugeloberfläche als Mantelfläche eines Rotationskörpers

Example. Man drehe einen Halbkreis mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Nullpunkt um die x-Achse. Der Graph eines Halbkreises oberhalb der x-Achse hat die Gleichung:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

Das Integrationsintervall ist $[-R;R]$. Siehe Abbildung 18. Die Ableitung ist:

$$y'=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Einsetzen dieser Funktion in das Oberflächenintegral:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx \\ &= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,dx \\ &= 2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx \\ &= 2\pi\left[Rx\right]_{-R}^{R} \\ &= 2\pi\left(R^2+R^2\right) \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

9. Geometrie und Analysis

Geschlossene Kurven können durch implizite Formen dargestellt werden, diese lassen sich jedoch nicht integrieren wie Kurven in der Darstellung $y=f(x)$, durch die wiederum jedoch keine geschlossenen Kurven darstellbar sind. Ziel ist es hier, eine neue Darstellungsform kennenzulernen.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 19. Die Kegelschnitte

9.1. **Kegelschnitte.** (siehe Abbildung 19)

- Kreise entstehen durch einen Schnitt senkrecht zur Achse des Kegels.
- Ellipsen entstehen durch einen Schnitt, der zur Achse des Kegels einen Winkel zwischen dem halben Öffnungswinkel des Kegels und 90° hat.

- Punkte entstehen durch einen Schnitt, der nur durch den Berührpunkt des Doppelkegels geht.
- Geraden entstehen durch Schnitt entlang einer Mantellinie oder durch die Achse.
- Parabeln entstehe durch einen Schnitt durch einen Kegel parallel zu einer Mantellinie.
- Hyperbeln entstehen durch einen Schnitt, der durch beide Kegel geht.

9.2. **Kegelschnitte mit Symmetrieachsen parallel zu den Achsen des Koordinatensystems.**

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 20. Kreis als Kegelschnitt

9.2.1. *Kreis.* (siehe Abbildung 20) Nach dem Satz des Pythagoras folgt für die implizite Darstellung (nicht nach y aufgelöst, daher eine geschlossene Kurve ober- und unterhalb der x-Achse beschreibend) des Ursprungskreises (Kreis mit Mittelpunkt $M\,(0 \mid 0)$):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt $M\,(x_0 \mid y_0)$ ist, wird durch die Hauptform[4] der Kreisgleichung beschrieben:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(siehe Abbildung 21)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 21. Kreis mit beleibigem Mittelpunkt als Kegelschnitt

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 22. Ellipse als Kegelschnitt

9.2.2. *Ellipse.* Ursprungsellipse (siehe Abbildung 22): Die Hauptachsen der Ellipse sind a und b. Wenn $a = b$, entsteht als Spezialform der Ellipse der Kreis. Die Brennpunkte F_1, F_2 sind gleich weit vom Achsenursprung entfernt; für jeden Punkt auf der Ellipse gilt die Definitionsgleichung der Ellipse: $F_1P + F_2P = 2a$: Die Summe der Abstände eines Punktes zu den Brennpunkten ist gleich dem großen Halbmesser der Ellipse. Also hat die Ursprungsellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hauptform der Ellipsengleichung: (siehe Abbildung 23)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Wenn hier $a = b$ ist, so erkennt man, dass diese Ellipse ein Kreis ist (gleiche Hauptachsenlängen) und bringt die Gleichung dann auf die entsprechende Form.

9.2.3. *Hyperbel.*

- Seitlich geöffnete Hyperbeln
  - Ursprungsform der Hyperbelgleichung (vgl. Abbildung 24 und die Ellipsengleichung)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  - Hauptform der Hyperbelgleichung (vgl. Abbildung 25)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Vertikal geöffnete Hyperbeln (vgl. Abbildung 26)
  - Ursprungsform

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

  - Hauptform

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

9.2.4. *Parabel.* Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand von einem festen Punkt (Brennpunkt F) und einer Gerade (Leitlinie A) gleich ist: $PF = PA$, vgl. Abbildung 27). Der Parameter p in der Parabelgleichung ist der Abstand AF. Es gilt für den Scheitelpunkt: $SF = SA = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}p$.

[4] Die Hauptform ergibt sich immer durch Ersetzen von x mit $x - x_0$ und y mit $y - y_0$.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 23. Ellipse mit beliebigem Mittelpunkt als Kegelschnitt

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 24. Hyperbel als Kegelschnitt

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 25. Hyperbel mit beliebigem Mittelpunkt als Kegelschnitt

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 26. nach oben und unten geöffnete Hyperbeln als Kegelschnitt

Ursprungsform der Parabelgleichung[5]:

$$y^2 = 2px$$

Hauptform der Parabelgleichung:

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0)$$

Auch die Parabel kann wie die Hyperbel nach oben geöffnet sein; dann müssen x, y vertauscht werden.

9.3. **Allgemeine Form.** Liegen die oben angegebenen Gleichungen der Hauptformen in ausmultiplizierter Form vor, so ergibt sich stets eine sog. »quadratische Form« der folgenden Gestalt:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Dieser Form kann man ansehen, dass es sich um einen achsenparallelen Kegelschnitt (Hauptachsen parallel zu x- und y-Achse) handelt oder um Sonderfälle: Punkt, eine Gerade, zwei sich schneidende Geraden, zwei parallele Geraden, leere Menge (d.h. es gibt keine reellen, sondern nur komplexe Lösungen). Kommt ein gemischtes Produkte Fxy vor, so sind handelt es sich um gedrehte Kegelschnitte (z.B. eine um 30° gedrehte Parabel) und also nicht um eine Hauptform.

Durch eine quadratische Ergänzung kann man die quadratische Form auf eine der Hauptformen bringen; an dieser wiederum kann man Achsen, Radius usw. ablesen.

Example 26. Erkennen des Kegelschnittes aus der quadratischen Form

Example. Um welchen Kegelschnitt handelt es sich bei:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 4y - 3 + 1 - 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 4 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4y^2 &= 4 \\
\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} &= 1
\end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine Ellipse. Direkt aus der erhaltenen Hauptform der Ellipsengleichung kann man nun ablesen: Der Mittelpunkt $M\,(x_0 \mid y_0)$ ist $M\,(1 \mid 0)$. Die Achsen sind $a = 2$ und $b = 1$.

Example 27. Erkennen des Kegelschnittes aus der quadratischen Form

Example.

$$\begin{aligned}
100x^2 - 400x - 9y^2 - 18y + 166 &= 0 \\
\Leftrightarrow 100\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 + 2y\right) + 166 &= 0 \\
\Leftrightarrow 100\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - 9\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) + 166 &= 0 \\
\Leftrightarrow 100\left(x^2 - 4x + 4\right) - 400 - 9\left(y^2 + 2y + 1\right) + 9 + 166 &= 0 \\
\Leftrightarrow 100\,(x-2)^2 - 9\,(y+1)^2 &= 225 \\
\Leftrightarrow \frac{100\,(x-2)^2}{225} - \frac{9\,(y+1)^2}{225} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y+1)^2}{25} &= 1
\end{aligned}$$

[5] Herleitung (nicht in der Vorlesung behandelt; vgl. Abbildung 27):

$$\begin{aligned}
PA &= PF \\
\Rightarrow x + \frac{1}{2}p &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 + y^2} \quad \mid ()^2 \\
\Leftrightarrow x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 &= x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= 2px
\end{aligned}$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 27. Parabel als Kegelschnitt

Hier musste also zweimal die quadratische Ergänzung durchgeführt werden. Abgelesen werden kann aus der Hauptform:

- es ist eine Hyperbel
- $M(2 \mid -1)$
- $a = \frac{3}{2}$, $b = 5$

9.4. **Parameterform von Kurven.** Die Darstellung in der Form $y = f(x)$ nennt man explizite Form; jede nicht nach y aufgelöste Form heißt implizit, z.B. $F(x, y) = \ldots$. Jede Form hat Vor- und Nachteile: nur die explizite Form ist differenzierbar, nur die implizite Form stellt geschlossene Kurven dar. Deshalb ist für viele Zwecke die Parameterform günstiger (siehe Abbildung 28):

$$C: \; x = f(t), \; y = f(t); \; t \in [a; b]$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 28. Kurve, die nur in Parameterform dargestellt werden kann

Dabei sind sind die Koordinaten des Punktes P:

$$P = (x(t), y(t))$$

und sein Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Example 28. Parameterdarstellung der Geraden

Example. Die Parameterdarstellung einer Geraden resultiert aus zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung wird getrennt in die Parameterform, d.i. in zwei einzelne Gleichungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) &= y_0 + t(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

Um eine Gerade in Parameterdarstellung in eine parameterfreie Form $y = f(x)$ umzuwandeln, bedient man sich Methoden aus der analytischen Geometrie: man löst eine Zeile zu t auf, setzt es für t in der anderen Zeile ein und erhält nach Auflösen zu y die parameterfreie Geradendarstellung.

Example 29. Parameterdarstellung eines Kreises

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 29. Zur Parameterdarstellung eines Kreises

Example. Die Parameterdarstellung eines Kreises ist:

$$C: \; x = R\cos t, \; y = R\sin t; \; t \in [0; 2\pi]$$

Denn für jeden Wert x gilt: $\frac{x}{R} = \cos t$ und für jeden Wert y: $\frac{y}{R} = \sin t$ (siehe Abbildung 29). Um aus dieser Kreisgleichung die Gleichung für um x_0, y_0 verschobene Kreise zu erhalten, ersetzt man einfach $x := x - x_0$, $y := y - y_0$, also entsteht:

$$C: \; x = x_0 + R\cos t, \; y = y_0 + R\sin t; \; t \in [0; 2\pi]$$

Durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen in der Form $\frac{x-x_0}{R} = \cos t$ bzw. $\frac{y-y_0}{R} = \sin t$ entsprechend dem Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = 1$ ergibt sich wieder die Hauptform der Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{R^2} + \frac{(y-y_0)^2}{R^2} &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Ein Winkel ohne explizite Angabe ist immer in der Eiheit Bogenmaß gegeben! Der Parameter t kann nicht immer mit einer bestimmten Bedeutung interpretiert werden, hier jedoch ist t ein Winkel.

Example 30. Ellipse in Parameterform

Example.

$$C: \; x = a\cos t, \; y = b\sin t; \; t \in [0; 2\pi]$$

Example 31. Hyperbel in Parameterform

Example. Ein Ast der Hyperbel ist in Parameterform:

$$C: \; x = a\cosh t, \; y = b\sinh t; \; t \in \mathbb{R}$$

Der andere Ast ergibt sich durch Ersetzung von a durch $-a$. Die Hauptform der Hyperbelgleichung in Parameterform ist

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Dies kann bewiesen werden durch die Definition des cosinus hyperbolicus und des sinus hyperbolicus (die so heißen, weil sie die Lage von Punkten auf der Hyperbel beschreiben):

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

und

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Example 32. Parabel in Parameterform

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 30. Zur Darstellung einer Parabel in Parameterform

Example.

$$C: \; x = t, \; y = \pm\sqrt{2pt}$$

(vgl. Abbildung 30) oder alternativ in einer Form, in der man nicht nur einen Ast der Parabel erhält:

$$C: \; x = \frac{t^2}{2p}, \; y = t$$

Example 33. Parameterform einer dreidimensionalen Kurve

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 31. Zur Darstellung einer Schraubenlinie in Parameterform

Example. Eine Schraubenlinie mit Ganghöhe h im R^3 (vergleiche Abbildung 31)

$$\begin{cases} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \\ z &= \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$

9.4.1. *Ableitung, Tangente und Normale für Parameterdarstellungen.* Gegeben ist:

$$C:\ x = x(t)\,,\ y = y(t)\,;\ t \in [t_1;t_2]$$

Seien die einzelnen Funktionen $x(t)$, $y(t)$ stetig differenzierbar, d.h. sie seien differenierbar und ihre Ableitungen seien stetig. Das Differenzieren nach einem Parameter wird mit $\dot{x}$ bezeichnet, das Differenzieren nach x mit $f'(x)$. Wir setzen dann:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Sei $P = (x(t);y(t)) \in C$ und sein Ortsvektor $\vec{r}(t)$. So ist der Richtungsvektor der Tangenten

$$\dot{\vec{r}}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Definition 4. Tangente und Normale in Parameterform

Definition.

- Die Tangente an C in $P = (x(t);y(t)) \in C$ ist:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$
mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Die Normale an C in $P = (x(t);y(t)) \in C$ ist (weil zwei Vektoren aufeinander senkrechtstehen, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist):
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$
mit $\mu \in \mathbb{R}$

Beweis zu Definition 4 (vgl. Abbildung 32): Um die Tangente zu bestimmen, geht man das übliche Verfahren

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 32. Zur Bestimmung der Tangenten an Kurven in Parameterform

über eine Sekante: Man wählt zwei Punkte P, Q auf der Kurve und bestimmt den Richtungsvektor der Sekanten durch diese beiden Punkte. Dann lässt man Q auf P zuwandern, wodurch der Richtungsvekor $\overrightarrow{PQ}$ in den Richtungsvektor der Tangenten in P konvergiert. Der Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ ergibt sich durch Subtraktion der Ortsvektoren von $P = (x(t);y(t))$ und $Q = (x(t+\Delta t);y(t+\Delta t))$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Nun ist $\frac{1}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{PQ}$ ebenfalls Richtungsvektor der Sekanten durch P und Q, denn die Multiplikation mit einem Skalar ändert nichts an der Richtung eines Vektors, kann maximal das Vorzeichen der Richtung ändern.

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Durch $\Delta t \to 0$ (d.h. bei $Q \to P$) ergibt sich der Richtungsvektor der Tangenten aus dem Grenzwert des eben berechneten Vektors, durch einen gewöhnlichen Grenzübergang entsprechend der Herleitung der Steigung normaler Graphen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Um nun die Normale an C zu bestimmen, sucht man nun einen Vektor, der orthogonal zum Richtungsvektor der Tangenten ist. Diesen nimmt man zu $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$ an und prüft, ob er orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden ist:

$$\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = 0$$

Also ist tatsächlich $\vec{u} \perp \dot{\vec{r}}$. qed.

9.4.2. *Umrechnung der Ableitungen in expliziter Form und Parameterform.* Frage: Ein Kurvenstück $y = f(x)$ besitze die Parameterdarstellung $C:\ x(t),\ y(t);\ t \in [t_1; t_2]$. Welche Beziehungen bestehen zwischen y', y'' und $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\ddot{x}$, $\ddot{y}$?

Definition 5. Ableitungen der expliziten aus solchen der Parameterform

Definition. $y = f(x)$ besitze die Parameterdarstellung $C:\ x(t),\ y(t);\ t \in [t_1; t_2]$. Seien $f(x)$ und $x(t)$ und $y(t)$ zweimal nach x bzw. t differenzierbar. Sei $\dot{x}(t) \neq 0$. Dann gilt:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{7}$$

genauer:

$$f'(x)_{|x=x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ t \in [t_1; t_2]$$

und

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

genauer:

$$f''(x)_{|x=x(t)} = \frac{\ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

Beweis von Definition 5: Es gilt

$$y = f(x) \Rightarrow y(t) = f(x(t))$$

Denn beide Funktionsdarstellungen müssen dieselben Werte liefern. Ableiten mit der Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt} \\ \Rightarrow \dot{y}(t) &= \frac{df(x)}{dx} \cdot \dot{x}(t) \\ \Rightarrow \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} &= \frac{df(x)}{dx}_{|x=x(t)} = y'(t) \end{aligned}$$

Das ist der Beweis zum ersten Teil des Satzes. Auf dieser Grundlage gilt:

$$f'(x(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Um die zweite Ableitung zu erhalten, differenziert man beide Seiten nach t, die linke Seite mit der Kettenregel, die rechte Seite mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{df'(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} &= \frac{\ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^2} \qquad |: \dot{x}(t) \\ f''(x)_{|x=x(t)} &= \frac{\ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3} \end{aligned}$$

qed.

Parameterfreie Darstellung der Tangentengleichung: Die Punktsteigungsform ist

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= m \\ \Leftrightarrow y &= m \cdot (x - x_0) + y_0 \end{aligned}$$

Für die Steigung m verwendet man den über Gleichung 7 berechenbaren Zahlwert $m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ und erhält damit die parameterfreie Tangentengleichung:

$$\Rightarrow y = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Die Steigung der Normalen ist $m_N = -\frac{1}{m_T}$ (m_T ist die Steigung der Tangenten); die parameterfreie Normalengleichung ist daher:

$$y = -\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Example 34. Berechnung der Tangenten an einen Halbkreis

Example.

$$C:\ x=\cos t,\ y=\sin t;\ t\in[0;\pi]$$

Siehe Abbildung 33. Mit $\dot{x}=-\sin t$, $\dot{y}=\cos t$, $t=\frac{\pi}{6}$ ergibt sich der Richtungsvektor der Tangenten im Punkt $P=(x(t);y(t))=\left(\frac{1}{2}\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$ zu:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Also ist die Tangentengleichung:

$$\vec{x}=\vec{p}+t\vec{r}$$

Dann: Berechnung des Normalenvektors und der Gleichungen von Tangente und Normale.

Example 35. Möglichkeiten zur Berechnung der Tangentengleichung

Example.

- Gegeben seien $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$. Dann ist die Steigung der Tangenten in einem Punkt: $m=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=y'\left(x_{|x=x(t)}\right)=f'\left(x_{|x=x(t)}\right)$. Dann setze man m in die Punkt-Anstiegsform ein und löse zu y auf:

$$\begin{aligned}\frac{y-y_0}{x-x_0}&=m\\ \Leftrightarrow y&=m\cdot(x-x_0)+y_0\end{aligned}$$

  Man erhält so die parameterfreie Geradendarstellung.
- gegeben sei die Parameterform der Tangenten. Der Richtungsvekor ist hier immer $\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix}$, so dass $m=\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$. Den Rest der parameterfreien Tangentengleichung berechnet man wieder über die Punktanstiegsform.

9.5. **Krümmung und Krümmungskreis.**

Definition 6. Krümmungskreis

Definition. Sei $P_0=(x_0,y_0)$ ein Punkt der Kurve $C:\ y=f(x)$. Ein Kreis, der durch P_0 geht und mit $f(x)$ in der 1. und 2. Ableitung übereinstimmt, heißt Krümmungskreis von C in P_0 (siehe Abbildung 34). Der Krümmungskreisradius ist ρ, der Krümmungskreismittelpunkt ist $M=(x_m,y_m)$.

Nötig ist der Krümmungskreis z.B. um zu bestimmen, wann ein Auto aus einer Kurve herausgetragen wird. Dazu darf der Krümmungskreis keines Punktes der Kurve zu klein sein.

Definition 7. Krümmung

Definition. Krümmung von C in x_0 (d.h. in $P_0=(x_0,y_0)$) ist definiert als:

$$k(x_0):=\frac{f''(x_0)}{\sqrt{1+(f'(x_0))^2}^{\,3}}$$

Die Krümmung ist also nicht identisch mit der zweiten Ableitung, steht aber mit ihr im Zusammenhang: Die Wurzel einer Zahl ist definitionsgemäß immer positiv; deshalb gibt das Vorzeichen von $f''(x_0)$ wie gewohnt das Krümmungsverhalten der Kurve an:

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 33. Zur Berechnung der Tangente an einen Halbkreis

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 34. Krümmungskreis an eine Kurve

- $k(x_0) > 0$: Linkskrümmung von x_0 (da $f''(x) > 0$)
- $k(x_0) < 0$: Rechtskrümmung von x_0 (da $f''(x) < 0$)

Berechnung des Krümmungskreises:

- $$\rho = \left| \frac{1}{k(x_0)} \right|$$
- $$x_m = x_0 - \frac{f'(x_0) \cdot \left(1 + (f'(x_0))^2\right)}{f''(x_0)}$$
- $$y_m = y_0 + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}$$

Die Gleichung des Krümmungskreises in Hauptachsenform ist damit:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \rho^2$$

Durch die Forderung, dass $f'(x)$ und $f''(x)$ des Kreises mit $f'(x)$ bzw. $f''(x)$ der Kurve übereinstimmen müssen, existiert für jeden Punkt der Kurve nur ein solcher Krümmungskreis (Beweis ist möglich). Die obigen Formeln können auch für Kurven in Parameterform verwendet werden, da diese auch abgeleitet weren können (siehe 9.4.1).

Example 36. Krümmungskreis im Ursprung der Normalparabel

Example. $y = x^2$, $P_0 = (0; 0)$ Siehe Abbildung 35.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 35. Krümmungskreis an eine Normalparabel

- Die Ableitungen sind: $y' = 2x$; $y'' = 2$.
- Die Krümmung ist:
$$k(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + (2x)^2}^3}$$
- Berechung der Krümmung in P_0: $k(0) = \frac{2}{1} = 2$
- Krümmungskreisradius in P_0: $\rho = \frac{1}{k(0)} = \frac{1}{2}$
- Mittelpunkt des Krümmungskreises in P_0:
$$x_m = 0 - \frac{0\left(1 + 0^2\right)}{2} = 0$$
$$y_m = 0 + \frac{1 + 0^2}{2} = \frac{1}{2}$$
Also ist $M = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- Der Krümmungskreis ist:
$$\begin{aligned} (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 &= \rho^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Example 37. Krümmungskreis einer Geraden

Example. Eine Gerade $y = mx + b$ hat $y' = m$, $y'' = 0$. Die Krümmung ist $k(x) = \frac{0}{\sqrt{1+m^2}^3} = 0$. Damit ist der Krümmungskreisradius $\rho = \frac{1}{k(x)}$ und weiter x_m, y_m nicht definiert. Man kann auch sagen: ρ ist unendlich groß, d.h. der Krümmungskreis stimmt mit der Geraden überein.

Example 38. Krümmungskreis einer Ellipsen in Parameterform

Example. (siehe Abbildung 36). Gesucht ist der Krümmungskreis in einem allgemeinen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$, hier unter einem Winkel von $t = \frac{\pi}{6}$. Die Parameterform der Ellipse ist:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\} t \in [0; 2\pi]$$

Benötigt werden die ersten beiden Ableitungen:

- $x = 2\cos t$; $\dot{x} = -2\sin t$; $\ddot{x} = -2\cos t$
- $y = \sin t$; $\dot{y} = \cos t$; $\ddot{y} = -\sin t$

Nach Einsetzen von $t = \frac{\pi}{6}$ in die Parameterform der Ellipse ergeben sich folgende Werte, u.a. die Koordinaten von P_0:

- $x_0 = \sqrt{3}$; $y_0 = \frac{1}{2}$
- $\dot{x}_0 = -1$; $\dot{y}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\ddot{x}_0 = -\sqrt{3}$; $\ddot{y} = -\frac{1}{2}$

Jetzt benötigt man die Ableitungen in expliziter Form; sie werden aus den Ableitungen in Parameterform berechnet, siehe 9.4.2. Ergebnisse für $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$:

$$y_0' = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$y_0'' = -2$$

Für die Krümmung in P_0 ergibt sich nun:

$$k(x_0) := \frac{y_0''}{\sqrt{1 + y_0'^2}^3} = -\frac{16}{7\sqrt{7}}$$

Berechnung der weiteren Größen:

$$\rho = \left| \frac{1}{k(x_0)} \right| = \frac{7\sqrt{7}}{16}$$

$$x_m = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$y_m = -\frac{3}{8}$$

Der Krümmungskreis:

$$\left(x - \frac{9\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{7}}{16}\right)^2$$

Natürlich können die Formeln zur Berechnung des Krümmungskreises auch direkt für Parameterform angegeben werden, statt für die Gleichung in Parameterform die Ableitungen in explizieter From auszurechnen. Die Krümmung z.B. ist in Parameterform:

$$k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

mit $\dot{x} \neq 0$ oder $\dot{y} \neq 0$.

10. Bogenlänge, Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern in Parameterform

$y = f(x)$ habe für $x \in [a; b]$ die Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ mit $a = x(t_1)$ und $b = x(t_2)$.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

ABBILDUNG 36. Krümmungskreis einer Ellipsen in Parameterform

10.1. **Bogenlänge einer Funktion in Parameterform.** Siehe Abbildung 37. Die Bogenlänge von Funktionen in expliziter Form wird ja berechnet über:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Um nun auf die Formel für die Bogenlänge einer Funktion in Parameterform zu kommen, führt man eine einfache Substitution für bestimmte Integrale durch mit $x=x(t)$, $\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t) \Leftrightarrow dx=\dot{x}(t)\cdot dt$. Bei Substitution in bestimmten Integralen kann die Rücksubstitution eingespart werden, wenn man die Integrationsgrenzen auch substituiert (dazu wird obige Vereinbarung $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ verwendet):

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}\,\dot{x}(t)\cdot dt \tag{8}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt \tag{9}$$

10.2. **Rotationsvolumen einer Funktion in Parameterform.**

$$\begin{aligned} V_x &= \pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)^2\cdot\dot{x}(t)\;dt \\ V_y &= \pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)^2\cdot\dot{y}(t)\;dt \end{aligned}$$

Die Herleitung geschieht analog zur Formel für die Bogenlänge einer Funktion in Parameterform (Gleichung 9).

10.3. **Mantelfläche einer Funktion in Parameterform.**

$$O=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

Example 39. Bogenlänge von Astroiden (»Sternkurven«)

Example.

$$C:\; x=a\cos^3 t,\; y=a\sin^3 t,\; t\in[0;2\pi]$$

ist dargestellt in Abbildung 38.

- Länge des Kurvenstücks im ersten Quadranten ($t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$).
  Dazu wird die erste Ableitung benötigt:

$$\dot{x}=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$$

$$\dot{y}=3a\sin^2 t\cdot\cos t$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 37. Zur Berechnung der Bogenlänge einer Funktion in Parameterform

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 38. Sternkurve (Astroide)

Die Anwendung der Formel für die Bogenlänge für Funktionen in Parameterform ergibt:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \cdot \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \cdot \sin t \cdot 1\, dt \\ &= \left[\frac{3}{2} a \sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a \end{aligned}$$

- Die Länge des vollen Bogenstücks ist damit $4\frac{3}{2}a = 6a$.

11. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 39. Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung

Geometrische Deutung: Hat man die Fläche unter einer Kurve berechnet, so möchte man sie durch ein flächengleiches Rechteck darstellen. Wie findet man die Höhe H des Rechtecks, das die Breites des Integrationsintervalls hat (vergleiche Abbildung 39)? Es ist dazu folgende Gleichung zu lösen:

$$F = \int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \cdot H$$

Anschaulich klar ist folgende Lösung für H: Es gibt ein ξ in $[a;b]$ mit $H = f(\xi)$. Der Mittelwertsatz besagt, dass es ein solches ξ in $(a;b)$, d.h. im Innern des Intervalls $[a;b]$ gibt ($\xi \neq a \wedge \xi \neq b$):

Definition 8. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Definition. Sei $f(x)$ stetig in $[a;b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a;b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

Es kann mehrere Werte ξ geben, z.B. unendlich viele wenn der Funktionsgraph eine waagerechte Gerade ist oder 2 bei einem konvexen Bogen. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist wichtig für numerische Näherungsverfahren in der Technik; so ist die aufgelöste Gleichung

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a}$$

die allgemeine Formulierung des Mittelwertes (Durchschnitts) in der Statistik.

12. Funktionen mehrerer Variablen

12.1. Grundlagen.

Definition 9. Funktion mit zwei unabhängigen Variablen

Definition. Eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen ist eine Vorschrift, die jedem Element (»Punkt«) einer Teilmenge $D \in \mathbb{R}^2$ genau einen Wert aus $\mathbb{R}$ zuordnet. Schreibweise:

(1) (mit Definitionsbereich D und Wertebereich $\mathbb{R}$)

$$f : D \to \mathbb{R}\,,\ D \subseteq \mathbb{R}^2$$

(2) (mit den unabhänigen Variablen x, y und der abhänggen Variablen z)

$$z = f(x, y) \ , \ (x, y) \in D$$

Für $P = (x, y)$ schreibt man auch $f(P)$ anstelle von $f(x, y)$.

Man bezeichnet $z = f(x, y)$ als »Fläche«, so wie man analog $y = f(x)$ als Kurve in $\mathbb{R}$ bezeichnet hat. In der Regel ist f als arithmetischer Ausdruck gegeben, wobei man sich D selbst überlegen muss; d.h. es wird nicht die vollständige Abbildung angegeben.

Example 40. Eine Funktion mit zwei Variablen

Example.

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Was ist der Definitionsbereich D? Natürlich:

$$D = \left\{(x, y) \mid 25 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

Was hat aber der Definitionsbereich für eine Gestalt, wenn man ihn als Fläche interpretiert? Es ist:

$$D = \left\{(x, y) \mid 25 \geq x^2 + y^2\right\}$$

Der Kreis $x^2 + y^2 = 25$ ist ein Kreis um $M = (0 \mid 0)$ mit $r = 5$. Da $x^2 + y^2$ auch < 25 sein darf, liegen auch alle Punkte innerhalb des Kreises darin. Die Definitionsmenge D ist also eine Kreisscheibe mit $r = 5$ und $M = (0 \mid 0)$.

Die Funktion ist nun durch eine Halbkugelschale (»halbe Sphäre«) mit $r = 5$ dargestellt. Siehe Abbildung 40. Sie besteht aus Punkten $P = (x, y, z)$ mit $(x, y) \in D$ und $z = f(x, y)$.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 40. Die Funktion $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$: eine Halbkugelschale

$z = f(x, y)$ heißt explizite Funktionsdarstellung. Mit ihr können keine geschlossenen Flächen dargestellt werden, also z.B. keine Kugeln. Dazu gibt es die implizite Form: ein nicht nach z aufgelöster Ausdruck (z.B. $F(x, y, z) = 0$) heißt implizite Funktionsdarstellung. Es ist aber keine Funktion im eigentlichen Sinne, da z.B. bei einer Kugel ja einem Paar (x, y) auch zwei Werte zugeordnet werden können: Implizite Darstellungen beinhalten oft mehrere Funktionen. Die explizite und implizite Darstellung verhalten sich analog zu den jeweiligen Darstellungen von Funktionen der Form $y = f(x)$.

Example 41. In einer impliziten Darstellung der Kugel (»Sphäre«) enthaltene Funktionen

Example.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Diese Form wird bei Auflösung zu z zu meheren Funktionen:

$$\begin{aligned} z_1 &= +\sqrt{25 - x^2 - y^2} \\ z_2 &= -\sqrt{25 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Dabei ist z_1 die obere halbe Sphäre, z_2 die untere halbe Sphäre.

Implizite Darstellungen sind manchmal nicht nach z auflösbar, trotz dass sie dann noch oft differenzierbar sind. Beispiel:

$$e^{xz} + \ln z + xyz = 0$$

Die Berechnung der Funktionsfläche kann über ein abgewandeltes Newtonverfahren geschehen.

Definition 10. Funktion mit n unabhängigen Vaiablen

Definition. Eine Funktion mit n unabhängigen Variablen ist eine Vorschrift, die jedem Element (»Punkt«) aus einer Teilmenge $D \in \mathbb{R}^n$ genau einen Wert aus $\mathbb{R}$ zuordnet. Es entstehen Flächen im $\mathbb{R}^{n+1}$. Schreibweisen:

(1)

$$f : D \to \mathbb{R} \, , \ D \subseteq R^n$$

(2)

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Vorläufig werden hier nur Funktionen mit zwei Variablen behandelt. Hinweis: bei Funktionen mit 2 Variablen treten Rechtecke und Kreise an die Stelle der Intervalle bei Funktionen mit einer Variable.

Definition 11. Abgeschlossenes Rechteck

Definition. Ein abgeschlossenes Rechteck ist

$$\begin{aligned} D &:= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\} \\ &= [a; b] \times [c; d] \end{aligned}$$

Hier gehören die Randpunkte des Rechtecks zu D. Vergleiche Abbildung 41.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 41. Abgeschlossenes Rechteck

Definition 12. Offenes Rechteck

Definition. Ein offenes Rechteck ist

$$\begin{aligned} D &:= \{(x, y) \mid a < x < b; c < y < d\} \\ &= (a; b) \times (c; d) \end{aligned}$$

Hier gehören die Randpunkte des Rechtecks nicht zu D. Vergleiche Abbilung 42.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 42. Offenes Rechteck

Definition 13. abgeschlossene Kreischeibe

Definition.

$$D = \left\{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\right\}$$

Die Randpunkte gehören zur Kreisscheibe. Vergleiche Abbildung 43.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 43. Abgeschlossene Kreisscheibe

Definition 14. offene Kreisscheibe

Definition.

$$D = \left\{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$$

Die Randpunkte gehören nicht zur Kreisscheibe. Vergleiche Abbildung 44.

$$D = \{(a, y) \mid a < x \leq b; c < y \leq d\}$$

ist weder ein offenes noch abgeschlossenes Rechteck. Siehe Abbildung 45. Nur der obere und rechte Rand gehören zu D.

Definition 15. Umgebung

Definition. Sei $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $\delta > 0$. Eine δ-Umgebung (kurz: Umgebung) von P_0 ist eine offene Kreisscheibe mit Radius δ und Mittelpunkt P_0:

$$\begin{aligned} U &= U(P_0) = U_\delta(P_0) \\ &= \left\{ (x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \right\} \end{aligned}$$

12.2. **Graphische Darstellung von Flächen $z = f(x, y)$.** Hier ist perspektivisches Zeichnen notwendig. Dazu erzeugt man zweidimensionale Schnitte durch die Fläche, indem man eine der drei Variablen (also auch z.B. die abhängige) konstant hält. Eine Figur kann dann aus vielen solchen Kurven zusammengesetzt werden. Man setzt die Variable konstant, bei dem man am wenigsten Rechanaufwand bekommt.

Example 42. Graphische Darstellung einer Funktion mit zwei Variablen

Example.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für $x = 0$ ergeben sich die Winkelhalbierenden der z/y-Ebene, d.h. ein Geradenpaar:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{y^2} \\ \Rightarrow z &= +y \\ \vee z &= -y \end{aligned}$$

Für $z = 0$ ergibt sich der Punkt $(0 \mid 0 \mid 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 &= x = y \end{aligned}$$

Für $z = 1$ ergibt sich ein Kreis mit $r = 1$ parallel zur x/y-Ebene in der Höhe $z = 1$:

$$1 = x^2 + y^2$$

Für $z = 2$ ergibt sich ein Kreis mit $r = 2$ parallel zur x/y-Ebene in der Höhe $z = 2$:

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow 4 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Grapische Darstellung siehe Abbildung 46. Es ergibt sich ein spitzer Doppelkegel über der x/y-Ebene.

Definition 16. Höhenlinien

Definition. Die Kurven mit $z =$ konst heißen Höhenlinien. In Beispiel 42 sind die Höhenlinien Kreise.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 44. Offene Kreisscheibe

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 45. Weder offenes noch abgeschlossenes Rechteck

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 46. Die Funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ für $x = 0$

12.3. **Stetigkeit einer Funktion** $f(x, y)$**.** »f ist stetig« bedeutet anschaulich: f hat keine Sprungstellen (»Steilhänge«), keine Löche keine Unendlichkeitsstellen. Mathematisch: Sei $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Definition 17. konvergente Punktfolge (vergleiche Abbildung 47)

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 47. Eine konvergente Punktfolge

Definition. Gegeben sei eine »Punktfolge« $P_i = (x_i, y_i)$ mit $i = 1, 2, \ldots$ und ein Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Die Folge P_i heißt konvergent gegen P_0 (in Zeichen: $\lim_{i\to\infty} P_i = P_0$), wenn die Koordinaten konvergieren: $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$ und $\lim_{i\to\infty} y_i = y_0$.

Definition 18. Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$

Definition. $z = f(x, y)$ heißt stetig im Punkt $P_0 = (x_0, y_0) \in D$, wenn für jede gegen P_0 konvergente Punktfolge $P_i = (x_i, y_i) \in D$ gilt:

$$\lim_{i\to\infty} f(P_i) = f(P_0)$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 48. Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$

Wenn man also eine beliebige Punktfolge gegen P_0 im Definitionsbereich betrachtet, so sagt diese Definition, dass die zugehörige Punktfolge der Funktionswerte gegen $f(P_0)$ konvergieren muss. Dies muss für jede beliebige Punktfolge gelten, damit die Funktion in einem Punkt stetig ist. Kann dies für jeden Punkt gezeigt werden, so ist die gesamte Funktion stetig.

Definition 19. Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt

Definition. $z = f(x, y)$ ist stetig in $P_0 \in D$ genau dann, wenn gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine δ-Umgebung $U(P_0) \subseteq D$ mit

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y)| < \varepsilon$$

für alle $(x, y) \in U(P_0)$.

Diese Definition bedeutet: Man wählt eine Schwankungsbreite der Funktionswerte ε und fordert, dass es dazu einen Kreis von Punkten um P_0 in der Definitionsmenge gibt, deren Funktionswerte alle innerhalb dieser Schwankungsbreite liegen. Wenn nun zu jedem noch so kleinen ε ein solcher Kreis von Punkten existiert, so ist die Funktion stetig in P_0.

Definition 20. Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$ über Stetigkeit in einem Punkt

Definition. $z = f(x, y)$ heißt stetig in D, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Example 43. Eine unstetige Funktion (mit »Steilhang«)[6]

Example. gegeben ist

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Darstellung siehe 49. An einem Steilhang wie hier bei $f(0, 0)$ müssten theoretisch unendlich viele Funktionswerte übereinander sein; dies widerspricht jedoch der Definition einer Funktion, hier ist es eine Lücke im Definitionsbereich der Teilfunktion $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Hier wurde ein Wert für diesen Steilhang an der Stelle $(0, 0)$ definiert,

[6] Solch ein Beweis der Unstetigkeit einer Funktion wird keine Aufgabe der Klausur sein!

nämlich 0. Jetzt sind aber nicht die Funktionswerte aller Punktfolgen, die gegen $(0,0)$ konevergieren, konvergent gegen 0 - abhängig davon, aus welcher Richtung sie gegen $(0,0)$ konvergieren. Beweis der Unstetigkeit: Man betrachtet zwei gegen $P_0 = (0,0)$ konvergente Punktfolgen:

$$\begin{aligned} P_i &= (x_i, y_i) = \left(\frac{1}{i}, 0\right) \\ Q_i &= (x_i, y_i) = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \end{aligned}$$

P_i wandert dabei auf der x-Achse, Q_i auf der Winkelhalbierenden der (x,y)-Ebene. Offensichtlich konvergieren beide Punktfolgen gegen $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} P_i &= (0,0) \\ \lim_{i\to\infty} Q_i &= (0,0) \end{aligned}$$

Jetzt betrachtet man die Folge der Funktionswerte zu P_i und Q_i:

$$f(P_i) = \frac{0}{\frac{1}{i^2}} = 0$$

das heißt also

$$\lim_{i\to\infty} f(P_i) = 0 = f(P_0)$$

Die Funktionswerte der Punktfolge P_i konvergieren also gegen $f(P_0)$.

$$f(Q_i) = \frac{\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^2}} = \frac{1}{2}$$

das heißt also

$$\lim_{i\to\infty} f(Q_i) = \frac{1}{2} \neq f(P_0)$$

Die Funktionswerte der Punktfolge Q_i konvergieren nicht gegen $f(P_0)$, also ist $f(x,y)$ unstetig aufgrund eines Steilhangs. Ebenso sind alle Funktionen mit Löchern im Wertebereich unstetig, z.B. die hier verwendete Teilfunktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $P = (0,0)$.

13. Partielle Ableitungen

13.1. **Partielle Ableitung erster Ordnung.** In Abbildung 50 sind achsenparallele Schnittkurven durch P_0 eingetragen. Um einen Anstieg in einem Punkt P_0 zu definieren, muss man die Richtung betrachten. So können die beiden Schnittkurven ganz unterschiedliche Steigungen für P_0 enthalten. Die Anstiege der Tangenten heißen partielle Ableitungen. Eine besondere Bedeutung haben x-Richtung und y-Richtung: Aus ihnen kann die Steigung in jeder Richtung in P_0 berechnet werden.

Definition 21. Partielle Ableitungen

Definition. »Partielle Ableitung« heißt, dass nur zu einer Variablen abgeleitet wird. Sei $z = f(x,y)$ in einem offenen Rechteck D definiert. Sei $P_0 = (x_0, y_0)$.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 49. Eine unstetige Funktion

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 50. Partielle Ableitung

(1) f heißt in P_0 partiell nach x differenzierbar. Das heißt per Definition: es existiert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =: \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} =: f_x(x_0, y_0)$$

Die letzten beiden Teile der Gleichung sind nur abkürzende Schreibweisen.

(2) f heißt in P_0 partiell nach y differenzierbar. Das heißt per Definition: es existiert

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =: \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} =: f_y(x_0, y_0)$$

Die letzten beiden Teile der Gleichung sind nur abkürzende Schreibweisen.

(3) Der Grenzwert $f_x(x_0, y_0)$ heißt partielle Ableitung von f nach x in P_0.

(4) Der Grenzwert $f_y(x_0, y_0)$ heißt partielle Ableitung von f nach y in P_0.

(5) f heißt in D partiell nach x (bzw. y) differenzierbar, wenn f für jeden $P \in D$ partiell nach x (bzw. y) differenzierbar ist. Schreibweise: f_x und $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. f_y und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Partielle Ableitungen werden berechnet, indem man nach einer Variablen differenziert und die anderen Variablen als Konstante betrachtet.

Example 44. partielles Differenzieren

Example.

$$z = f(x, y) = x^2 y + y$$

Gesucht sind die partiellen Ableitungen f_x, f_y in $P_0 = (1; 2)$.

$f_x = 2xy$, also $f_x(1; 2) = 4$

$f_y = x^2 + 1$, also $f_y(1; 2) = 2$

13.2. **Partielle Ableitungen höherer Ordnung.** Gegeben ist $z = f(x, y)$.

- Die Partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind: f_x und f_y
- Die Partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind (wobei immer $f_{xy} = f_{yx}$; unter Angabe aller Schreibweisen):
  - $f_{xx} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
  - $f_{xy} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}$
  - $f_{yx} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}$
  - $f_{yy} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- Die Partiellen Ableitungen 3. Ordnung sind: f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx},. . .,f_{yyy}
- Die Partiellen Ableitungen n-ter Ordnung: Es gibt $n + 1$ Stück.

Definition 22. Satz von Schwarz über die Differentiationsreihenfolge

Definition. Ist eine Funktion samt ihren Ableitungen bis zur k-ten Ordnung stetig, so hängen die partiellen Ableitungen der Ordnung $m \leq k$ nicht von der Reihenfolge ab. Das heißt, es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= f_{yx} \\ f_{xxy} &= f_{yxx} = f_{xyx} \end{aligned}$$

Example 45. Der Satz von Schwarz

Example.

$$f(x, y) = x^2 y^2 + \sin e^y$$

$$\begin{aligned} f_x &= 2y^2 x \\ f_y &= 2x^2 y + \cos e^y \cdot e^y \\ f_{xy} &= 4yx = f_{yx} \end{aligned}$$

13.3. Relative Extrema. Siehe Abbildung 51.

Definition 23. Relative Extrema

Definition. Sei $z = f(x, y)$ in einem offenen Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert. $f(x_0, y_0)$ hat in P_0 ein relatives Maximum (bzw. relatives Minimum), wenn in einer Umgebung $U(P_0) \subseteq D$ gilt: $f(P_0) \geq f(P)$ für alle $P \in U$ bzw. $f(P_0) \leq f(P)$ für alle $P \in U$.

Der relative Extremwert einer Fläche ist auch der relative Extremwert aller Schnittkurven, also auch der, die bei Schnitten parallel zur x- bzw. y-Achse entstehen (die Kurven $g(x)$ und $h(y)$). Diese Kurven hängen nur von einer Variablen ab (die andere unabhängige Variable ist konstant). Damit gilt: Wenn in $P_0 = (x_0, y_0)$ ein relativer Extremwert vorliegt, dann gilt:

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

und

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Sucht man relative Extremwerte, dann bestimmt man die Punkte (x_i, y_i) mit $f_x(x_i, y_i) = 0$ und gleichzeitig $f_y(x_i, y_i) = 0$. Unter diesen müssen die relativen Extremwerte vorkommen (vgl. analog die zusätzlichen hinreichenden Bedingungen bei der Bestimmung von Extremwerten von $f(x)$).

Example 46. Bestimmung der relativen Extrema von $f(x, y)$

Example. Es sei

$$z = \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} z_x &= x \\ z_y &= -2y \end{aligned}$$

Das entstehende Gleichungssystem muss gelöst werden:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Die Funktion hat also höchstens einen Extremwert, nämlich an der Stelle (x_1, y_1). Die Abbildung 52 zeigt, dass die Funktion tatsächlich jedoch keinen relativen Extremwert hat. Eine solche Abbildung wird durch das Erzeugen von Schnitten erstellt, indem man einen Wert konstant hält, d.i. dafür eine konstante Zahl (günstig z.B. 0) einsetzt. An Schnittkurven ergeben sich für:

$y = 0$:: $z = \frac{1}{2}x^2$
$x = 0$:: $z = -y^2$
$x = c$:: $z = c^2 - y^2$. Es sind parallel zu $z = -y^2$ auf der x-Achse verschobene Kurven.

Es ist geschickt, wenige Schnitte in der x/z-Ebene zu erzeugen und den Rest perspektivisch dazu in der y/z-Ebene. Für diese Funktion ist die Fläche eine Sattelfläche, für die $(0, 0)$ kein Extremwert, sondern ein Sattelpunkt ist.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 51. Relative Extrema einer Funktion mit 2 unabhängigen Variablen

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 52. Kein relatives Extremum bei dieser Funktion

Um das hinreichende Kriterium für relative Extrema zu bestimmen, benötigt man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Definition 24. Diskriminante

Definition.

$$\Delta := f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

Ausführlich:

$$\Delta (x, y) = f_{xx} (x, y) \cdot f_{yy} (x, y) - f_{xy}^2 (x, y)$$

Definition 25. Satz über relative Extremwerte und Sattelpunkte

Definition. Sei $f(x, y)$ samt allen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 in einer offenen Menge D definiert und stetig. Sei $f_x = f_y = 0$ für $(x_0, y_0) \in D$. Dann gilt:

(1) Wenn $\Delta (x_0, y_0) > 0$, so liegt bei (x_0, y_0) ein relativer Extremwert vor, und zwar ein relatives Maximum, wenn $f_{xx} (x_0, y_0) < 0$ (oder auch $f_{yy} (x_0, y_0) < 0$), bzw. ein relatives Minimum, wenn $f_{xx} (x_0, y_0) > 0$ (oder auch $f_{yy} (x_0, y_0) > 0$).
(2) Wenn $\Delta (x_0, y_0) < 0$, so liegt bei (x_0, y_0) kein relativer Extremwert, sondern ein Sattelpunkt vor (gleichzeitig Definition des Sattelpunktes; ein Sattelpunkt ist je nach betrachteter Schnittkurve Maximum oder Minimum).
(3) Wenn $\Delta (x_0, y_0) = 0$, so liegt bei (x_0, y_0) ein relativer Extremwert vor oder auch nicht. Es sind dann weitere Untersuchungen nötig.

Example 47. Bestimmung relativer Extrema

Example.

$$z = x^2 - x^2 y^2 + y^2$$

Zuerst müssen alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung gebildet werden; bildet man sowohl z_{xy} als auch z_{yx}, so muss dabei dasselbe Ergebnis herauskommen - man hat hier also eine Kontrollmöglichkeit seiner Rechnung:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x - 2xy^2 \\ z_y &= -2x^2 y + 2y \\ z_{xx} &= 2 - 2y^2 \\ z_{yy} &= -2x^2 + 2 \\ z_{xy} = z_{yx} &= -4xy \end{aligned}$$

Nun suche man die gemeinsamen Nullstellen von z_x und z_y:

$$\begin{aligned} 2x - 2xy^2 &= 0 \\ -2x^2 y + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Da dies kein lineares Gleichungssystem ist, kann kein Gaußscher Eliminationsalgorithmus angewandt werden. Es muss stets ein individueller Weg gefunden werden, hier das Einsetzungsverfahren: man setzt die Nullstellen einer Gleichung in die andere ein und prüft, ob es auch Nullstellen dieser zweiten Gleichung sind. Setze also die erste Gleichung 0:

$$\begin{aligned} 2x - 2xy^2 &= 0 \\ 2x \cdot (1 - y^2) &= 0 \\ 2x \cdot (1 + y) \cdot (1 - y) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= -1 \end{aligned}$$

Nun setzte man die gefundenen Nullstellen nacheinander in die zweite Gleichung ein:

$x_1 = 0$**:**

$$\begin{aligned} 2y &= 0 \\ \Rightarrow y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hier hat man also zwei zusammengehörende Nullstellen, für die das ganze LGS 0 wird. Entsprechend wurden die Indizes zuerst fortlaufend gewählt, denn man weiß nicht, welche Nullstellen zusammengehören.

$y_2 = 1$**::**

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ \Rightarrow x_{21} &= 1 \\ \vee x_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Zu dieser Nullstelle von y gehören also zwei verschiedene Nullstellen von x! Vergleiche die entsprechende Indizierung. Insgesamt hat man also schon drei Punkte (x_i, y_i), die das Gleichungssystem lösen.

$y_3 = -1$**::**

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ \Rightarrow x_{31} &= 1 \\ \vee x_{32} &= -1 \end{aligned}$$

Die fünf gefundenen Nullstellen sind also (doppelte Werte sind ggf. zu streichen):

$$\begin{aligned} P_1 &= (0;0) \\ P_{21} &= (1;1) \\ P_{22} &= (-1;1) \\ P_{31} &= (1;-1) \\ P_{32} &= (-1;-1) \end{aligned}$$

Alle diese Punkte müssen nun in die Diskriminante eingesetzt werden, um zu prüfen, ob es sich tatsächlich um relative Extrema handelt:

$$\Delta(P_1) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$

da $z_{xx}(P_1) = 2 > 0$, besteht bei P_1 ein relatives Minimum, nämlich $z(P_1)$.

$$\Delta(P_{21}) = 0 \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0$$

bei P_{21} liegt also kein relativer Extremwert vor, sondern ein Sattelpunkt.

$$\Delta(P_{22}) = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0$$

bei P_{22} liegt also auch ein Sattelpunkt vor.

$$\Delta(P_{31}) = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0$$

bei P_{31} liegt also auch ein Sattelpunkt vor.

$$\Delta(P_{32}) = 0 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$$

bei P_{32} liegt also auch ein Sattelpunkt vor.

Zu all diesen Punkten muss nun noch der Funktionswert (z-Wert) berechnet werden:

$$z(P_1) = 0$$

d.h. $(0;0;0)$ ist das relative Minimum.

$$\begin{aligned} z(P_{21}) &= 1 \\ z(P_{22}) &= 1 \\ z(P_{31}) &= 1 \\ z(P_{32}) &= 1 \end{aligned}$$

Die Sattelpunkte haben also folgende Koordionaten:

$$\begin{gathered} (1;1;1) \\ (-1;1;1) \\ (1;-1;1) \\ (-1;-1;1) \end{gathered}$$

Example 48. Berechnung von relativen Extrema einer Funktion $z(x, y)$

Example. Es sei

$$z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
z_x &= -2xe^{-\left(x^2+y^2\right)} \\
z_y &= -2ye^{-\left(x^2+y^2\right)} \\
z_{xx} &= -2e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2x \cdot (-2x) \cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\
&= 2e^{-\left(x^2+y^2\right)} \left(-1+2x^2\right) \\
z_{yy} &= 2e^{-\left(x^2+y^2\right)} \left(-1+2y^2\right) \\
z_{xy} &= 4xye^{-\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}$$

Bestimmung der gemeinsamen Nullstellen von z_x und z_y:

$$\begin{aligned}
-2xe^{-\left(x^2+y^2\right)} &= 0 \\
-2ye^{-\left(x^2+y^2\right)} &= 0
\end{aligned}$$

Die erste Zeile hat nur die Nullstelle $x_1 = 0$, denn die Funktion e^x hat keine Nullstellen. Durch Einsetzen in die zweite Zeile findet man die einzige gemeinsame Nullstelle $P_0 = (0; 0)$. Einsetzen in die Diskriminante liefert:

$$\Delta\left(P_0\right) = (-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$$

Es liegt also ein Extremwert vor. Da $z_{xx}\left(P_0\right) = -2 < 0$, liegt ein relatives Maximum vor.

$$z\,(0, 0) = 1$$

Also ist $(0; 0; 1)$ das relative Maximum.

14. Tangentialebenen

Gegeben ist eine Fläche $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in D$. Sei $(x_0, y_0) \in D$. Sei $z_0 = f(x_0, y_0)$. Gesucht ist nun die Tangentialebene (TE) im Punkt (x_0, y_0, z_0) der Fläche z, d.h. die Ebene, die die Fläche nur im Punkt (x_0, y_0, z_0) berührt. Dies entspricht bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen dem Suchen der Tangenten in einem Punkt (x_0, y_0). Siehe Abbildung 53.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 53. Tangentialebene

Wenn es eine Tangentialebene gibt, dann muss sie die Tangenten an die Schnittkurven parallel zur x- und y-Achse im Punkt (x_0, y_0, z_0) enthalten. Daraus lassen sich also die Richtungsvektoren der Tangentialeben berechnen:

in x-Achsenrichtung:: Die z-Komponente dieses Vektors ist die Ableitung der Schnittkurve parallel zur x-Achse in diesem Punkt:

$$r_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

in y-Achsenrichtung::

$$r_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Die Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0) an die Fläche $z = f(x, y)$ ist also in Punkt-Richtungs-Form bzw. Parameterform:

$$TE: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Was ist die Koordinatenform der Tangentialebene? Umwandlung der Parameterform in Koordinatenform durch Aufteilen in skalare Gleichungen:

$$\begin{aligned} I &: \quad x = x_0 + \lambda \\ II &: \quad y = y_0 + \mu \\ III &: \quad z = z_0 + \lambda \cdot f_x(x_0, y_0) + \mu \cdot f_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Nun wird die erste Gleichung zu λ, die zweite zu μ aufgelöst und damit μ, λ in der dritten Gleichung ersetzt, wodurch man die Koordinatenform der Tangentialebene erhält; als allgemeine Formel:

$$III \quad \rightarrow \quad z = z_0 + (x - x_0) \cdot f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f_y(x_0, y_0) \tag{10}$$

In der Tangentialebene liegen alle Tangenten im Punkt (x_0, y_0, z_0), was hier jedoch nicht bewiesen werden soll.

Example 49. Berechnung der Tangentialebene

Example.

$$z = -x^2 - y^2$$

Gesucht ist die Tangentialebene im Punkt $P_0^* = (1; 1; z(1; 1)) = (1; 1; -2)$. Skizze der Funktion durch Erzeugung von Schnitten siehe Abbildung 54. Diesen Körper nennt man Paraboloid; die Schnittkurven in der x/y-Ebene sind Kreise. Um die Tangentialebene in Koordinatenform anzugeben, benötigt man die partiellen

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 54. Paraboloid als Beispiel zur Tangentialebene

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \quad ; \quad f_x(1; 1) = -2 \\ f_y &= -2y \quad ; \quad f_y(1, 1) = -2 \end{aligned}$$

damit wird die Tangentialebene in P_0^*durch Einsetzen in die allgemeine Formel Gleichung 10:

$$\begin{aligned} z &= -2 + (x - 1)(-2) + (y - 1)(-2) \\ &= -2x - 2y + 2 \end{aligned}$$

Andere Darstellungsmöglichkeit der Tangentialebene in Koordinatenform ausgehend von Gleichung 10; vor dem Einsetzen der Koordinaten x_0, y_0 enthält diese Darstellung die Tangentialebenen in allen Punkten:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= (x - x_0) \cdot f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot f_y(x_0, y_0) \\ \Rightarrow \Delta z &= \Delta x \cdot f_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f_y(x_0, y_0) \\ \Rightarrow dz &= dx \cdot f_x(x_0, y_0) + dy \cdot f_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Definition 26. totales Differential

Definition. Der Ausdruck $dz = dx \cdot f_x(x, y) + dy \cdot f_y(x, y)$ heißt totales Differential von $f(x, y)$.

In angewandten Wissenschaften muss häufig die Frage beantwortet werden, ob zu einem totalen Differential (d.i. eine Gleichung, die die Tangentialebenen in allen Punkten P_0 enthalten soll) eine Fläche $z(x, y)$ existiert. Die Lösung ist einfach: Aus $f_y(x, y)$ im totalen Differential bilde man $f_{yx}(x, y)$, und aus $f_x(x, y)$ bilde man $f_{xy}(x, y)$. Wenn nun gilt $f_{xy} = f_{yx}$, so beschreibt dieses totale Differential eine Fläche, aufrund des Satzes von Schwarz (Definition 22).

15. Bereichsintegral, Doppelintegral

Ursprüngliche Fragestellung: Was ist das Volumen zwischen einer Fläche $f(x, y)$ und dem Bereich B in der (x, y)-Ebene? Der Bereich darf eine beliebige, auch krummlinige Begrenzungsfläche haben. Analog zum Integrieren in der Ebene nähert man die Fläche von B durch kleine rechteckige Flächenelemente ein. Der Fehler wird immer geringer, wenn die Flächenelemente kleiner werden. Also folgt für die näherungsweise Berechnung von V: Zerlege B in Teilrechtecke B_1, B_2, …, B_n. Wähle $P_i = (x_i, y_i) \in B_i$. Berechne dann die durch Quader angeäherten Teilvolumina:

$$\Delta V_i = f(P_i) \cdot \Delta B_i$$

ΔB_i: Fläche von B_i
$f(P_i)$: Höhe der Säule über B_i

Dann ergibt sich das Gesamtvolumen aus der Summe der Teilvolumina:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta B_i$$

Anschaulich klar ist: Je feiner die Zerlegung, desto besser ist die Näherung. Wenn die Unterteilung unendlich klein ist ($n \to \infty$), so kann statt dem Summenzeichen ein Integral geschrieben werden, vgl. die Einführung des Integrals für Funktionen $f(x)$. Im Beispiel Abbildung 55 wird B in 4 Elemente eingeteilt.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 55. Volumen über einer Fläche bei Funktionen mit 2 Parametern

Definition 27. zweidimensionales Bereichsintegral über B

Definition. Falls der Grenzwert des Ausdrucks $\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta B_i$ für $n \to \infty$ (sofern gleichzeitig $\Delta B_i \to 0$) existiert, dann heißt dieser Grenzwert zweidimensionales Bereichsintegral über B. In Zeichen:

$$\int \int_B f(x, y)\ dB$$

oder

$$\int \int_B f\ dB$$

Definition 28. Linearität und Zerlegbarkeit zweidimensionaler Bereichsintegrale

Definition. Seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ integrierbar auf B. Dann gilt:

(1) Linearität: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\int \int_B (af + bg)\, dB = a \int \int_B f\, dB + b \int \int_B g\, dB$$
Dies ist ganz analog zur Linearität einfacher Integrale.
(2) Zerlegbarkeit: Sei $B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ (d.h. man teilt einen Bereich in zwei getrennte Bereiche ein). So gilt:
$$\int \int_B f\ dB = \int \int_{B_1} f\ dB + \int \int_{B_2} f\ dB$$

Falls $f(x, y) \equiv 1$[7], dann gilt

$$\int \int_B f(x, y)\ dB = \int \int_B dB = |B| = \text{Fläche von } B$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta B_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta B_i = \text{Fläche von } B$$

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 56. Ein Rechtecksbereich

[7] Das ist die konstante Funktion $f(x, y) = 1$, zur Unterscheidung von einer Gleichung hier geschrieben als »$f(x, y)$ identisch 1«.

15.1. Bereichsintegrale über Rechtecksbereichen. Siehe 56. Der abgeschlossene Rechteckbereich B kann nach Definition 11 geschrieben werden als

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \mid a \le x \le b;\ c \le y \le d\} \\ &= [a;b] \times [c;d] \end{aligned}$$

Bei einem solchen Bereich ist die Berechnung des Bereichsintegrals einfach möglich (die Grenzen werden durch Grenzen bezogen auf x ersetzt):

$$\begin{aligned} \int\int_B f\,dB &= \int_c^d \left[\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\ dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\ dy \right] dx \end{aligned}$$

Formulierung in Worten: Bei Rechtecksbereichen ist die Integrationsreihenfolge vertauschbar. Aufgrund dieser Zerlegungsmöglichkeit werden die Bereichsintegrale auch Doppel- oder Zweifachintegrale genannt. Vereinbarung einer Schreibweise: die Klammern werden weggelassen, das innere Integral wird stets zuerst berechnet. Bei einem Integral muss dabei die Variable, zu der nicht integriert werden soll, konstant gehalten werden. Manchmal muss die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, weil das Integral nur auf einem Weg (einfach) berechenbar ist.

15.2. Bereichsintegrale über Normalbereichen bezüglich der x-Achse. Siehe Abbildung 57.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 57. Normalbereich bezüglich der x-Achse

Zwei sich nicht schneidende beliebige Kurven sind über einem Intervall $[a;b]$ definiert und liegen in der (x,y)-Ebene. Der Flächenbereich zwischen ihnen heißt Normalbereich bezüglich x, denn er ist von Kurven begrenzt, die von der Variablen x abhängen. Über diesem Normalbereich ist nun eine Funktion $z(x,y)$ definiert. Jeder Definitionsbereich einer Funktion $z(x,y)$ lässt sich aufteilen in Normalbereiche bezüglich x und y.

Beschreibung des Normalbereichs bezüglich x:

$$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ u(x) \le y \le v(x)\}$$

Das Bereichsintegral über einem solchen Normalbereich bezüglich x ist nun:

$$\int\int_B f\,dB = \int_a^b \int_{y=u(x)}^{y=v(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Die Integrationsreihenfolge ist hier nicht vertauschbar: das äußere Integral ist immer das mit den konstanten Grenzen; integriert wird immer von innen nach außen.

15.3. Bereichsintegrale über Normalbereichen bezüglich der y-Achse. Siehe Abbildung 58.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 58. Normalbereich bezüglich der y-Achse

Die hier auftretenden Begrenzungskurven sind nicht unbedingt als Funktion von x darstellbar, weil sie nicht eineindeutig sind!

$$B = \{(x,y) \,| c \le y \le d,\ r(y) \le x \le s(y)\}$$

Das Bereichsintegral ist hier nun:

$$\int\int_B = f\,dB = \int_c^d \int_{x=r(y)}^{x=s(y)} f(x,y)\ dx\ dy$$

Das innere Integral muss wieder stets zuerst berechnet werden. Die Integrationsreihenfolge ist ist nicht vertauschbar (d.h. inneres und äußeres Integral können nicht vertauscht werden).

Example 50. Bereichsintegral über Rechtecksbereichen

Example.

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sin y$$

$$B = [-1;1] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

- Die Integrationsreihenfolge darf bei Rechtecksbereichen ja vertauscht werden. Kommt man in einer Richtung nicht weiter, sollte man dies daher versuchen.

$$\begin{aligned}
\int\int_B f\,dB &= \int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} x^2 \sin y\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[-x^2 \cdot \cos y\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\left(-x^2 \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-x^2 \cos 0\right)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

- Kontrollmöglichkeit: Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge muss dasselbe Ergebnis entstehen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=-1}^{x=1} x^2 \sin y\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3}{3}\sin y\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy \\
&= \frac{2}{3}\left[-\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Beide Wege waren gleich einfach zu berechnen. So kann man also die Richtigkeit der eigenen Rechnung kontrollieren.

Example 51. Bereichsintegral über Rechtecksbereichen

Example.

$$f(x,y) = \begin{cases} y^x \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^+ \text{und } y = 0 \end{cases}$$

Der maximale Definitionsbereich dieser Funktion ist also der 1. Quadrant und die x-Achse, jedoch nicht die y-Achse. Gegeben ist der Rechtecksbereich, über dem integriert werden soll:

$$\begin{aligned}
B &= \{(x,y) \mid 0 < a \le x \le b;\ 0 \le y \le 1\} \\
&= [a;b] \times [0;1] \text{ mit } 0 < a \le b
\end{aligned}$$

- Erste Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{y=0}^{y=1} y^x \, dy \, dx &= \int_a^b \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_a^b \left[\frac{1}{x+1} - \frac{0}{x+1} \right] dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{x+1} \, dx \\
&= \left[\ln |x+1| \right]_a^b \\
&= \ln |b+1| - \ln |a+1| \\
&= \ln \frac{|b+1|}{|a+1|} \\
\text{da } 0 < a \leq b: \quad &= \ln \frac{b+1}{a+1}
\end{aligned}$$

  Über einzelne Löcher in der Funktion und sonstige Unstetigkeiten (wie hier vielleicht bei $y = 0$; außer Unendlichkeitsstellen) kann einfach hinwegintegriert werden, denn wenn eine Funktion für einen einzelnen x-Wert nicht definiert ist, so ändert dieser unendlich schmale Teil nichts an der Fläche.
- Andere Integrationsreihenfolge[8]:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x=a}^{x=b} y^x \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x=a}^{x=b} e^{x \cdot \ln y} \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{e^{x \cdot \ln y}}{\ln y} \right]_a^b dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^x}{\ln y} \right]_a^b dy \\
&= \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} \, dy \\
&= \; ?
\end{aligned}$$

  Die Stammfunktion ist bei dieser Integrationsreihenfolge unbekannt.

Example 52. Bereichsintegral: Integration über einem Dreiecksbereich

Example.

$$f(x, y) = x^2 y$$

Der Bereich, über dem integriert werden soll, ist in Abbildung 59dargestellt. Der Bereich lässt sich als Nor-

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 59. Integration über einem Dreiecksbereich

malbereich bezüglich der x-Achse auffassen:

$$\begin{aligned}
y &= -x + 2 \\
y &= -\frac{1}{2} x + 1
\end{aligned}$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2; \; -\frac{1}{2} x + 1 \leq y \leq -x + 2 \right\}$$

Bemerkung: der Bereich B kann auch als Vereinigung von 2 Normalbereichen bezüglich y aufgefasst werden (jedoch nicht als ein Normalbereich bezüglich y; vgl. Abbildung 59). Die Summe der Bereichsintegrale über diesen Teilbereichen wäre identisch mit dem Bereichsintegral über dem Bereich als Normalbereich bezüglich x:

$$\int \int_B = \int \int_{B_1} f \, dB + \int \int_{B_2} f \, dB$$

[8] unter Verwendung von $y^x = e^{\ln(y^x)} = e^{x \cdot \ln x}$

Dieser Rechenweg wäre sinnvoll, wenn die Integration beim Bereichsintegral bezüglich x nicht durchgeführt werden könnte.

$$\begin{aligned}
\int\int_B f\, dB &= \int_0^2 \int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=-x+2} x^2 y\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{y=-x+2} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2\left(x^2-4x+4\right)}{2} - \frac{x^2\left(\frac{x^2}{4}-x+1\right)}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{2} + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{3x^4}{8} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\, dx \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Example 53. Bereichsintegral über einem Normalbereich bezüglich y

Example.

$$f(x,y) = y^2 + yx$$

Der Bereich, über dem integriert werden soll, ist in Abbildung 60 dargestellt. Der Bereich wird geschickterweise

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 60. Beispiel für einen Normalbereich

als Normalbereich bezüglich y aufgefasst, um ihn nicht in zwei Normalbereiche bezüglich x aufteilen zu müssen.

$$B = \left\{(x,y)\,|1 \le y \le 2;\ 0 \le x \le y^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{x=0}^{x=y^2} y^2 + yx\, dx\, dy &= \int_1^2 \left[y^2x + \frac{yx^2}{2}\right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_1^2 \left(y^4 + \frac{y^5}{2}\right) dy \\
&= \left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{12}\right]_1^2 \\
&= \frac{229}{20}
\end{aligned} \tag{11}$$

Man sieht in Gleichung 11, was die Integrationsgrenzen $x = 0$ usw. bedeuten: In der Stammfunktion muss die Variable x durch diese Grenze ersetzt werden, da ja zu dx integriert werden sollte.

16. Gewöhnliche Differentialgleichungen

16.1. **Grundbegriffe.**

Definition 29. Differentialgleichung n-ter Ordnung

Definition. Eine Gleichung der Form

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

heißt Differentialgleichung (DG) n-ter Ordnung. Zum Beispiel: $y'' \cdot y + x - y'x^2 + 5 = 0$ ist eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung, denn die Ableitung vom höchsten Grad ist y'', also vom zweiten Grad.

Definition 30. Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung

Definition. Eine Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion $y = f(x)$, für die gilt:

$$\Phi\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

Die »aufgelöste« Form $y^{(n)} = \phi\left(x, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ heißt explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung. Diese Auflösung ist nur in manchen Fällen möglich. Jede andere Form heißt implizite Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; letztere werden hier nicht behandelt. Partielle Differentialgleichungen enthalten mehrere unabhängige Variablen und partielle Ableitungen. Beispiel:

$$x \cdot z_x + 3yz - 3y^2 z_y - 5 = 0$$

Gesucht ist hier eine Funktion $z = f(x, y)$, die diese partielle Differentialgleichung erfüllt.

Example 54. Beispiel für gewöhnliche Differentialgleichungen

Example.

$$y' = 2x$$

Es ist eine explizite Differentialgleichung (aufgelöst zur höchsten Ableitung) erster Ordnung (denn die höchste Ableitung ist erster Ordnung).

Example 55. Beispiel für gewöhnliche Differentialgleichungen

Example.

$$y'' = 2$$

Eine explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Example 56. Beispiel für gewöhnliche Differentialgleichungen

Example.

$$y''y + 1 = y'$$

Eine implizite (nicht nach der Ableitung vom höchsten Grad aufgelöst!) Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Aufgabe im Zusammenhang mit Differentialgleichungen: Bestimme die Lösungsschar (d.h. die Menge aller Funktionen $y = f(x)$), die eine gegebene Differentialgleichung erfüllen und deren Eigenschaften. Hier wird auf das Erfüllen der Eigenschaften weniger Rücksicht genommen. Differentialgleichungen haben also im Normalfall unendlich viele Funktionen, die sie lösen.

Example 57. Lösungsschar einer Differentialgleichung

Example.

$$y' = 2x$$

Lösungsschar: Die Lösungsschar ist $y = x^2 + C$. C wird hier »Scharparameter« oder auch wie früher »Integrationskonstante« genannt. Für die Parameter muss stets ihre Definitionsmenge angegeben werden, hier $C \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften: Die Lösungsschar stellt alle zu $y = x^2$ deckungsgleichen und nach oben geöffeneten Parabeln mit Scheitel auf der y-Achse dar.

Spezielle Lösung: Zum Beispiel $y = x^2 + 5$.

Manchmal sucht man nicht eine Lösungsschar, sondern nur eine spezielle Lösung (auch »partikuläre Lösung« genannt).

Wichtige Änderung in der Nomenklatur: Das Lösen von Differentialgleichungen wird in der Regel als »integrieren« bezeichnet. Die Berechnung eines unbestimmten oder bestimmten Integrals heißt dann »quadrieren« (vor dieser Begriffsänderung war das »integrieren«).

Example 58. Lösen einer Differentialgleichung

Example.

$$y'' = 2$$

Durch zweimaliges Quadrieren nach x dieser Gleichung (vorher »Integrieren«) erhält man die Lösungsschar:

$$y = x^2 + C_1 x + C_2$$

Bei jedem Schritt der Quadratur entsteht dabei eine neue Integrationskonstante (bzw. Scharparameter). Eigenschaften der Lösungsschar: Es handelt sich um alle zu $y = x^2$ deckungsgleichen und nach oben geöffneten Parabeln der (x, y)-Ebene. Den Scheitel S erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + C_1 x + C_2 \\ y &= x^2 + C_1 x + \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + C_2 \\ &= \left(x + \frac{C_1}{2}\right)^2 + C_2 - \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt kann hier abgelesen werden als $S = \left(-\frac{C_1}{2}; C_2 - \left(\frac{C_1}{2}\right)^2\right)$, denn diese Parabel wird durch $x + \frac{C_1}{2}$ gegenüber der Normalparael um $\frac{C_1}{2}$ nach links und um $C_2 - \left(\frac{C_1}{2}\right)^2$nach oben verschoben. Damit ist jeder Punkt der (x, y)-Ebene Scheitel einer Parabel der Lösungsschar. Diese Untersuchung der Eigenschaften hilft zur Unterscheidung dieser Lösungsschar von der aus Beispiel 57.

Definition 31. Allgemeines Integral der Differentialgleichung

Definition. Eine Funktion der Form $y = f(x, C_1, \ldots, C_2)$ heißt allgemeines Integral (auch »allgemeine Lösung«) der Differentialgleichung n-ter Ordnung, wenn sie für jede Wahl (es gibt hiervon gelegentlich Ausnahmen!) der Konstanten $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung liefert. Diese Lösung ist dann die sog. spezielle oder partikuläre Lösung.

Definition 32. Singuläre Lösung

Definition. Eine Lösung, die sich nicht durch spezielle Wahl der Konstanten $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ aus dem allgemeinen Integral gewinnen lässt, heißt singuläre Lösung (auch »singuläres Integral«).[9]

Es gibt keine universelle Methode zur Lösung einer Differentialgleichung. Je nach Typ gibt es verschiedene Methoden, weshalb dieses Gebiet mathematisch sehr umfangreich ist. Es gibt prinzipiell unendlich viele Lösungsverfahren, von denen natürlich viele noch nicht entdeckt sind.

Definition 33. Anfangswertproblem

Definition. Ein Anfangswertproblem liegt vor, wenn zu einer Differentialgleichung n-ter Ordnung einer spezielle Lösung (»ein spezielles Integral«) $y = f(x)$ gesucht ist, die für eine (!) Stelle x_0 die Bedingungen (sog. »Anfangswerte«) $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{0,1}, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{0,n-1}$ erfüllt. Man gibt sich hier also bestimmte Werte $y_0, \ldots, y_{0,n-1}$ vor, die die Funktion $y = f(x)$ und ihre Ableitungen an der gewählten Stelle x_0 liefern sollen.

Definition 34. Randwertproblem

Definition. Ein Randwertproblem liegt dann vor, wenn für zwei Stellen $x_1 \neq x_2$ Zusatzbedingungen (die sog. »Randbedingungen«) für die Lösungen gestellt sind. Das namensgebende Beispiel ist ein biegbarer und belasteter Balken, der jedoch an seinen beiden Enden fest aufgehängt ist.

16.2. **Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordung mit getrennten Variablen.**

Definition 35. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition. Eine Differentialgleichung der Form $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$ (oder $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$) heißt Differentialgleichung mit getrennten (bzw. trennbaren) Variablen.

[9] Die Lösung einer Differentialgleichung wird wie hier auch als ihr »Integral« bezeichnet.

Lösungsmethode: »Methode der Trennung der Variablen«.

(1) Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\ \Leftrightarrow h(y) \cdot dy &= g(x) \cdot dx \end{aligned}$$

(2) Quadrieren (d.i. beidseitiges Integrieren). Es muss auch eine Integrationskonstante eingefügt werden, jedoch nur einseitig (aufgrund Zusammenfassung der beiden Integrationskonstanten zu einer).

$$\begin{aligned} \int h(y)\, dy &= \int g(x)\, dx \\ \Rightarrow H(y) &= G(x) + C \qquad (12) \end{aligned}$$

(3) Auflösen. Dieser Schritt kann manchmal nicht durchgeführt werden. Also: Wenn möglich, die Gleichung 12 nach y auflösen.

Example 59. Lösen von Differentialgleichungen mit Trennung der Variablen

Example.

$$\begin{aligned} y' &= xy \\ \frac{dy}{dx} &= xy \end{aligned}$$

(1) Trennen

$$\frac{1}{y} \cdot dy = x \cdot dx$$

(2) Quadrieren

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} \cdot dy &= \int x \cdot dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

(3) Auflösen

$$\begin{aligned} e^{\ln|y|} &= e^{\frac{x^2}{2}+C} \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{\frac{x^2}{2}+C} \\ &= e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \\ y &= \pm e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= K \cdot e^{\frac{x^2}{2}},\ K \in \mathbb{R}, K \neq 0 \end{aligned}$$

Der gewählte Scharparameter K kann die Werte von e^C (die nur positiv sind, aber nie 0) im positiven und negativen Bereich annehmen. Was ist nun, wenn man $K = 0$ eingesetzt wird? Die entstehende Funktion $y = 0$ ist tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (eine singuläre Lösung). Damit ist $y = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$ die explizite Darstellung der allgemeinen Lösung.

Example 60. Lösen von Differentialgleichungen mit Trennung der Variablen

Example.

$$y' = \frac{2xy}{y^2+4}$$

(1) Trennen der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \cdot \frac{y}{y^2+4} \\ \frac{y^2+4}{y} \cdot dy &= 2x \cdot dx \end{aligned}$$

(2) Quadrieren

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2+4}{y}\,dy &= \int 2x\,dx \\ \Rightarrow \int \left(y+\frac{4}{y}\right)dy &= x^2+C \\ \Rightarrow \frac{1}{2}y^2+4\cdot\ln|y| &= x^2+C\end{aligned}$$

(3) Auflösen nach y: Nicht möglich.

Example 61. Ein Anfangswertproblem

Example.

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1};\ y(0)=1$$

Der Anfangswert (oder manchmal »die Anfangswerte«) ist $y(0)=1$. Zuerst wird die allgemeine Lösung berechnet:

(1) Trennen

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

(2) Quadrieren

$$\ln|y| = \ln\left|x^2+1\right| + C$$

(3) Auflösen

$$\begin{aligned}e^{\ln|y|} &= e^C\cdot\left|x^2+1\right| \\ |y| &= e^C\cdot\left|x^2+1\right| \\ y &= \pm e^C\cdot\left|x^2+1\right|\end{aligned}$$

Da stets $x^2+1>0$, kann der Betragsstrich wegbleiben:

$$y = \pm e^C\left(x^2+1\right)$$

Zunächst wird wieder ein $K\in\mathbb{R}, K\neq 0$ gewählt. Nach der Sonderbetrachtung für $K=0$ ergibt sich, dass sich auch für $K=0$ eine Lösung ergibt:

$$y = K\left(x^2+1\right),\ K\in\mathbb{R}$$

(4) Anfangswerte $x=0$, $y(0)=1$ in die allgemeine Lösung einsetzen, um die spezielle Lösung zu finden:

$$1 = K\cdot 1 \Rightarrow K=1$$

Also folgt:

$$y = x^2+1$$

ist Lösung des Anfangswertproblems.

16.3. **Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.**

Definition 36. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Definition. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ heißt Ähnlichkeitsdifferentialgleichung oder gleichgradige Differentialgleichung.

Lösungsverfahren.

(1) Substitution mit $\frac{y}{x}=u(x)$, um die Differentialgleichung in eine andere zu transfomieren, die hoffentlich einfacher zu lösen ist. Daraus folgt für die Substitution von y':

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{y}{x} \\ \Rightarrow y &= xu \\ \Rightarrow y' &= u+xu'\end{aligned}$$

Differenziert wurde hier nach der Produktregel $(uv)' = u'v+uv'$; beachte: $(x)'=1$.

(2) Durchführen der Substitution in der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}u+xu' &= f(u) \\ \Rightarrow u' &= \frac{f(u)-u}{x}\end{aligned}$$

(3) Trennung der Variablen. Diese Differentialgleichung kann nun nach der Methode der Trennung der Variablen integriert werden:

$$\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx$$

(4) Rücksubstitution und nach y auflösen, falls möglich.

Example 62. Lösen einer Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Example.

$$y' = \frac{x + 4y}{x}$$

Man erkennt oft nicht zu Anfang, dass eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung vorliegt. Also sind Umformungen nötig:

$$y' = 1 + 4 \cdot \frac{y}{x}$$

(1) Substitution

$$u = \frac{y}{x} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow y = xu \tag{14}$$

$$\Rightarrow y' = u + xu' \tag{15}$$

(2) Einsetzen der Gleichungen 13 und 15 in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u + xu' &= 1 + 4 \cdot u \\ \Leftrightarrow xu' &= 1 + 3u \\ \Leftrightarrow u' &= \frac{1 + 3u}{x} \end{aligned}$$

(3) Lösung nach der Methode der Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1 + 3u}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + 3u} du &= \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{1 + 3u} du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln |1 + 3u| &= \ln |x| + C \\ \Leftrightarrow \ln \left(|1 + 3u|^{\frac{1}{3}} \right) &= \ln |x| + C \end{aligned}$$

(4) Rücksubstitution und nach y auflösen: Zuerst nach u auflösen:

$$\begin{aligned} \ln |1 + 3u|^{\frac{1}{3}} &= \ln |x| + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln |1+3u|^{\frac{1}{3}}} &= e^{\ln |x| + C} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{|1 + 3u|} &= |x| \cdot e^C \\ \Leftrightarrow |1 + 3u| &= e^{3C} \cdot |x|^3 \\ \Leftrightarrow 1 + 3u &= \pm e^{3C} \cdot |x|^3 \\ \Leftrightarrow 1 + 3u &= \pm e^{3C} \cdot x^3 \text{ mit } C \in \mathbb{R} \\ 3u &= kx^3 - 1 \text{ mit } k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \\ u &= \frac{1}{3} \left(kx^3 - 1 \right) \end{aligned}$$

Dann die Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{1}{3} \left(kx^3 - 1 \right) \\ y &= \frac{1}{3} \left(kx^4 - x \right) \text{ mit } k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \end{aligned}$$

Jetzt soll geprüft werden, ob $k = 0$ nicht doch eine Lösung der Differentialgleichung ist. Dazu setzt man die für $k = 0$ entstehenden Funktionen $y = -\frac{1}{3}x$ und $y' = -\frac{1}{3}$ in die ursprüngliche Differentialgleichung ein und prüft, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= \frac{x+4\left(-\frac{1}{3}x\right)}{x} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3} &= 1-\frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}\ \text{(w)} \end{aligned}$$

Damit folgt für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = \frac{1}{3}\left(Kx^4 - x\right),\ K \in \mathbb{R}$$

Example 63. Ein Anfangswertproblem

Example. Die Differentialgleichung ist:

$$y' = \frac{x^2+6y^2}{3xy}$$

Der Anfangswert sei:

$$y(1) = 1$$

(1) Umformen in eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{3y} + \frac{6y}{3x} \\ y' &= \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{y} + 2\cdot\frac{y}{x} \end{aligned}$$

(2) Substitution:

$$u = \frac{y}{x}$$

also

$$\begin{aligned} y &= xu \\ \Rightarrow y' &= u + xu' \end{aligned}$$

(3) Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u + xu' &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} + 2u \\ xu' &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} + u = \frac{1+3u^2}{3u} \\ u' &= \frac{1+3u^2}{3u}\cdot\frac{1}{x} \end{aligned}$$

(4) Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{3u}{1+3u^2}du &= \frac{1}{x}dx \\ \frac{1}{2}\int\frac{6u}{1+3u^2}du &= \ln|x| + C \\ \frac{1}{2}\ln\left|1+3u^2\right| &= \ln|x| + C \\ \ln\left|1+3u^2\right| &= \ln|x|^2 + 2C \end{aligned}$$

Die Betragsstriche sind nicht notwendig, denn $1+3u^2 \geq 0$ und $\ln|x|^2 \geq 0$. Es wäre also falsch, beim Weglassen der Betragsstriche auf der anderen Seite $\pm$ zu schreiben!

$$\begin{aligned} \ln\left(1+3u^2\right) &= \ln x^2 + C \\ 1+3u^2 &= x^2\cdot e^C \\ 3u^2 &= Kx^2 - 1 \text{ mit } K > 0 \\ u^2 &= \frac{1}{3}\left(Kx^2-1\right) \text{ mit } K > 0 \\ u &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(Kx^2-1\right)} \text{mit } K > 0 \end{aligned}$$

(5) Rücksubstitution

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(Kx^2-1\right)} \text{ mit } K>0 \\ y &= \pm x\sqrt{\frac{1}{3}\left(Kx^2-1\right)} \text{ mit } K>0 \end{aligned}$$

$K=0$ ist keine Lösung, denn sonst würde das Argument der Wurzel $-\frac{1}{3}$.

(6) Anfangswerte einsetzen: $x_0=1$ und $y\left(x_0\right)=1$ in die allgemeine Lösung einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 &= \pm 1\sqrt{\frac{1}{3}\left(K1^2-1\right)} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{3}\left(K-1\right) \\ \Leftrightarrow K &= 4 \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$y=\pm x\sqrt{\left(4x^2-1\right)}$$

Die negative Lösung scheidet aus, da $y\left(1\right)=1>0$ gelten muss. Die Lösung eines Anfangswertproblems kann stets nur eine Funktion sein, deshalb muss (!) eine Lösung falsch sein. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems endgültig:

$$y=x\sqrt{\left(4x^2-1\right)}$$

16.4. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (Methode der Variation der Konstanten).

Definition 37. Inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung (IDG)

Definition.

$$y'+p\left(x\right)\cdot y=q\left(x\right)$$

heißt inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die rechte Seite heißt Störglied (aufgrund Anwendung in der Schwingungsberechnung, bei der die Schwingung von dieser rechten Seite erzwungen wird). Inhomogen heißt sie deshalb, weil auf der rechten Seite eine Funktion steht.
Die Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung geschieht, indem zuerst die entsprechende homogene Differentialgleichung erster Ordnung gelöst wird.

Definition 38. Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung (HDG)

Definition.

$$y'+p\left(x\right)\cdot y=0$$

heißt homogene Differentialgleichung erster Ordnung. Sie wird mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} y' &= -p\left(x\right)\cdot y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -p\left(x\right)\cdot y \\ \Rightarrow \frac{1}{y}dy &= -p\left(x\right)\cdot dx \\ \ln\left|y\right| &= -\int p\left(x\right)dx+C \\ \left|y\right| &= e^{-\int p(x)dx+C} \\ y &= \pm e^C\cdot e^{-\int p(x)dx} \\ y &= K\cdot e^{-\int p(x)dx} \text{ für } K\neq 0 \end{aligned}$$

Ist nun auch $K=0$ eine Lösung? Dazu muss geprüft werden, ob die entsprechenden Funktion $y=0$ und $y'=0$ Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung sind. Dies ist tatsächlich der Fall. Also ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y=K\cdot e^{-\int p(x)dx} \text{ mit } k\in\mathbb{R} \tag{16}$$

Example 64. Lösung einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

Example.

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0 \\ y' &= -xy \end{aligned}$$

Man könnte diese Gleichung auch mit der oben hergeleiteten Formel lösen, hier jedoch wird das allgemeine Verfahren der Trennung der Variablen angewandt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} dy &= -x\, dx \\ \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + C \\ |y| &= e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y &= \pm e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y &= K \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ mit } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Example 65. Lösung einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

Example.

$$\begin{aligned} \left(x^2+1\right) y' + xy &= 0 \\ y' &= -\frac{xy}{x^2+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-x}{x^2+1} \cdot y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{-x}{x^2+1} dx \\ \ln|y| &= -\frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + C \\ |y| &= e^C \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ y &= \pm e^C \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= K \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ mit } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat eine allgemeine Lösung. Die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung setzt sich aus dieser Lösung und einer weiteren als Summanden zusammen.

Definition 39. Lösung des Anfangswertproblems einer Inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

Definition. Seien $p(x)$, $q(x)$ stetig auf $[a;b]$. Dann hat jedes Anfangswertproblem

$$y' + p(x)\, y = q(x)\,,\ y(x_0) = y_0,\ x_0 \in [a;b]\,,\ y_0 \in \mathbb{R}$$

genaue eine Lösung $y = y(x)$. (Hier ohne Beweis).

Definition 40. Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

Definition. Sei y_P eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

und y_H die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + p(x)\, y = 0$$

Dann ist $y_I := y_P + y_H$ die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung.

Beweis dieses Satzes. Sei y_P eine spezielle (feste) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung. Sei y_I eine beliebige andere spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentalgleichung. Es gilt:

$$\begin{aligned} I: &\quad y_P' + p(x) \cdot y_P = q(x) \\ II: &\quad y_I' + p(x) \cdot y_I = q(x) \\ II - I: &\quad y_I' - y_P' + p(x) \cdot (y_I - y_P) = 0 \end{aligned}$$

$y_H := y_I - y_p$ ist also die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

$$\Rightarrow y_I = y_P + y_H$$

Es durchlaufe y_H nun alle speziellen Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} I: &\quad y_H' + p(x)\, y_H = 0 \\ II: &\quad y_P' + p(x)\, y_P = q(x) \\ I + II: &\quad y_H' + y_P' + p(x)\,(y_H + y_P) = q(x) \end{aligned}$$

Also ist $y_H + y_P$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Man benötigt also eine spezielle Lösung y_P der inhomogenen linearen Differentialgleichung und kann dann mit dieser Summe alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung finden. Wie findet man nun eine spezielle Lösung y_P der inhomogenen Differentialgleichung?:

Methode der Variation der Konstanten. Dazu betrachte man die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (Gleichung 16):

$$y_H = K \cdot e^{-\int p(x)dx} \text{ mit } K \in \mathbb{R}$$

Aufgrund von Beobachtungen weiß man nun, dass die spezielle Lösung der IDG sich von dieser allgemeinen Lsung der HDG dadurch unterscheidet, dass K eine Funktion von x ist. Man sucht also eine solche Funktion $K(x)$, weshalb dieses Verfahren »Methode der Variation der Konstanten« heißt. Also Ansatz:

$$y_P = K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Ableiten:

$$y_P' = K'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - p(x)\, K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Diese Ausdrücke für y_P und y_P' müssen als partikuläre Lösung die IDG $y' + p(x)\, y = q(x)$ erfüllen, man setzt also darin ein. Bei der Vereinfachung muss sich stets der Teil $K'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ wegheben, d.h. hier hat man eine Kontrollmöglichkeit seiner Rechnung:

$$\begin{aligned} K'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - p(x) \cdot K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + p(x) \cdot K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ \Leftrightarrow K'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \end{aligned}$$

Auflösen nach K':

$$K'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

und Quadrieren:

$$K(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

Hier wurde die Integrationskonstante auf $C = 0$ gesetzt, denn wir wollen ja nur eine spezielle Lösung der IDG finden. Die gefundene Funktion $K(x)$ setzt man nun ein in den Ansatz $y_P = K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Example 66. Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

Example. Inhomogene lineare Differentialgleichung:

$$y' + xy = (x+1) \cdot e^x$$

zugehörige homogene lineare Differentialgleichung:

$$y' + xy = 0$$

Man könnte zur Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung auch die allgemeine Formel (Gleichung 16) verwenden. Hier über das allgemeine Verfahren der Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} y' &= -xy \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy &= -x\,dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= -\frac{x^2}{2}+C \\ \Leftrightarrow |y| &= e^C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Rightarrow y &= \pm e^C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Rightarrow y_H &= K\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ mit } K\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmen einer speziellen Lösung der IDG nach der »Methode der Variation der Konstanten«: Ansatz:

$$y_P = K(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ableiten:

$$y_P' = K'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x\cdot K(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Einsetzen von y_p, y_P' in die IDG:

$$\begin{aligned} K'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x\cdot K(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + x\cdot K(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} &= (x+1)\,e^x \\ \Leftrightarrow K'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} &= (x+1)\,e^x \\ \Leftrightarrow K'(x) &= (x+1)\,e^{x+\frac{x^2}{2}} \\ \Rightarrow K(x) &= e^{x+\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

In den Ansatz einsetzen:

$$y_P = e^{x+\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^x$$

Daraus folgt nach 40 für die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= e^x + K\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,, K\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Example 67. Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

Example. Die inhomogene lineare Differentialgleichung sei:

$$\left(x^2+1\right)y' + xy = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Diese muss zuerst in die Form $y' + p(x)\,y = q(x)$ gebracht werden:

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = 2x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung ist dann:

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = 0$$

(1) Lösen der homogenen linearen Differentialgleichung (»Methode der Trennung der Variablen«)

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{x^2+1}y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy &= -\frac{x}{x^2+1}dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C \\ &= \ln\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} + C \\ \Leftrightarrow |y| &= e^C\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow y &= \pm e^C\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow y_H &= K\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, K\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Methode der Variation der Konstanten: Ansatz

(17)
$$\begin{aligned} y_P &= K(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ y'_P &= K'(x) \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2x) \cdot K(x) \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) y_P und y'_P in die inhomogene lineare Differentialgleichung einsetzen. Ergebnis nach Vereinfachung:

$$\begin{aligned} K'(x) \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} &= 2x \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow K'(x) &= 2x \\ \Rightarrow K(x) &= x^2 \end{aligned}$$

(4) $K(x)$ in den Ansatz (Gleichung 17) einsetzen:

$$y_P = x^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(5) Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung berechnen:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= \frac{x^2+K}{\sqrt{x^2+1}}, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zusammenfassung der wesentlichen Schritte zur Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung. Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

(1) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' + p(x)\, y = 0$. Nach der Lösungsformel direkt anzugeben als:

$$y_H = K \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

(2) Ansatz (»Methode der Variation der Konstanten«):

$$y_P = K(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

liefert

$$\begin{aligned} K'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ \Rightarrow K(x) &= \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \end{aligned}$$

(3) $K(x)$ einsetzen in den Ansatz y_P liefert y_P
(4) Die Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist dann

$$y_I = y_P + y_H$$

Example 68. Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit gekürztem Verfahren

Example.

$$y' + y \cdot \tan x = \frac{1}{\cos x}$$

(1) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + y \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Diese ist:

$$\begin{aligned} y_H &= K \cdot e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= K \cdot e^{\ln|\cos x|} \\ &= K \cdot |\cos x| \\ &= K \cdot \cos x \end{aligned}$$

(da $K \in \mathbb{R}$).

(2) Ansatz (Methode der »Variation der Konstanten«): Dazu einsetzen in die Formel:

$$\begin{aligned} K'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ \Rightarrow K'(x) &= q(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \\ &= q(x)\cdot e^{-\ln|\cos x|} = q(x)\frac{1}{|\cos x|} \\ &= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{|\cos x|} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}\text{für } \cos x > 0 \\ -\frac{1}{\cos^2 x}\text{für } \cos x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow K(x) &= \begin{cases} \tan x \text{ für } \cos x > 0 \\ -\tan x \text{ für } \cos x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $y_P = K(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$

$$y_P = \begin{cases} \tan x\cdot\cos x = \sin x \text{ für } \cos x > 0 \\ -\tan x\cdot\cos x = -\sin x \text{ für } \cos x < 0 \end{cases}$$

Intervalle in denen $\cos x > 0$ sind z.B. $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Intervalle in denen $\cos x < 0$ sind z.B. $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

(4) $y_I = y_P + y_H$

$$y_I = \begin{cases} \sin x + K\cdot\cos x \text{ für } \cos x > 0 \\ -\sin x + K\cdot\cos x \text{ für } \cos x < 0 \end{cases}$$

16.5. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Definition 41. inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffitienten

Definition.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)\ , a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

heißt inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung[10] mit konstanten Koeffitienten. (IDG)

Definition 42. homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffitienten

Definition.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\ , a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

heißt homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffitienten (HDG). Sie hat auf der rechten Seite keine abhängige Funktion, sondern eine 0!

Definition 43. Struktur der allgemeinen Lösung der HDG

Definition.

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n\ , C_i \in \mathbb{R}$$

Das heißt: Jede spezielle Lösung ist (aufgrund der Struktur der allgemeinen Lösung) eine Linearkombination von n speziellen Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die eine sogenannte Lösungsbasis bilden.

16.5.1. *Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Bestimmung der Lösungsbasis.* Viele Verfahren bei der Lösung von Differentialgleichungen basieren auf Ansätzen, die durch Erfahrung mit entsprechenden Aufgaben ermittelt wurden. Also Ansatz: Wir nehmen an, jede spezielle Lösung habe die Gestalt $y = e^{\lambda x}$ (λ ist eine bisher unbekannte Konstante). Diese Annahme ist mit $x \in \mathbb{C}$ stets richtig. Man muss nun die ersten n Ableitungen dieses Lösungsansatzes bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Diese Ableitungen werden in die HDG eingesetzt:

$$\begin{aligned} a_n\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} &= 0 \quad |: e^{\lambda x} \\ \Leftrightarrow a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 &= 0 \qquad (18) \end{aligned}$$

[10] Die Symbolik $y^{(n)}$ meint dabei: Ableitung n-ter Ordnung von y.

Die Gleichung 18 heißt charakteristische Gleichung der HDG. Ihre Lösungen sind die Nullstellen eines Polynoms n-ter Ordnung. Es hat nach dem Fundamantalsatz der Algebra n Lösungen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, wobei Vielfachheiten von Lösungen vorkommen können. Für jede dieser Lösungen ergibt sich eine spezielle Lösung der HDG, und aus der Linearkombination dieser speziellen Lösungen dann die allgemeine Lösung der HDG.

Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung. Nun werden 3 Fälle unterschieden:

(1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien alle verschieden und reell. Man bestimme sie und kann dann leicht die Funktionen angeben, die die Lösungsbasis bilden:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien alle verschieden, manche davon komplex. Es gilt ja immer: tritt eine komplexe Lösung auf, so ist die konjuguiert komplexe Zahl auch eine Lösung. Also: sei λ_ν komplex und $\lambda_{\nu+1}$ die zu λ_ν konjugiert komplexe Zahl, d.h. (mit $j = \sqrt{-1}$[11])

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \alpha + j \cdot \beta \\ \lambda_{\nu+1} &= \alpha - j \cdot \beta \end{aligned}$$

Die Lösungsbasis $y_1, \ldots, y_n$ ergibt sich dann aus Bestandteilen für komplexe λ_ν

$$\begin{aligned} y_\nu &= e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \\ y_{\nu+1} &= e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \end{aligned}$$

und aus Bestandteilen für reelle λ_i wie im ersten Fall:

$$y_i = e^{\lambda_i x}$$

(3) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien nicht alle verschieden (reell oder komplex). Die einfachen Nullstellen λ_ρ (reell oder komplex) ergeben sich wie in den vorigen beiden Fälle. Für vielfache Nullstellen gilt:
Sei $\lambda_\nu = \lambda_{\nu+1} = \ldots = \lambda_{\nu+r}$. Man bilde y_ν gemäß dem ersten oder zweiten Fall. Dann gehören zur Lösungsbasis:

$$\begin{aligned} & y_\nu \\ y_{\nu+1} &:= x \cdot y_\nu \\ y_{\nu+2} &:= x^2 \cdot y_\nu \\ & \vdots \\ y_{\nu+r} &:= x^r \cdot y_\nu \end{aligned}$$

Ferner gehören alle Funktionen y_ρ zur Lösungsbasis, die man aus den einfachen Nullstellen λ_ρ gemäß dem ersten oder zweiten Fall erhält.

Example 69. Lösen einer HDG mit einfachen, nicht komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung

Example.

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$$

Daraus ergibt sich die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

Deren Nullstellen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\lambda - 3) - (\lambda - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - 1\right)(\lambda - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

Die Lösungsbasis ist damit:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= e^{x} \\ y_3 &= e^{3x} \end{aligned}$$

Und die allgemeine Lösung besteht aus Linearkombinationen der Lösungsbasis:

$$y_H = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{x} + C_3 \cdot e^{3x}$$

Example 70. Lösen einer HDG mit einfachen, auch komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung

[11] Bei Differentialgleichungen wird wie in der Elektrotechnik die komplexe EInheit i meist als j geschrieben. In der Elektrotechnik wurde dies eingeführt, um die komplexe Einheit von der Stromstärke I zu unterscheiden.

Example.

$$y''' - 4y'' + 13y' = 0$$

Die charakteristische Gleichung ist dann:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda &= 0 \\ \lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2|3} &= 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3j \end{aligned}$$

Die Lösungsbasis ist dann also:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= e^{2x}\sin 3x \\ y_3 &= e^{2x}\cos 3x \end{aligned}$$

Und die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Linearkombination der Lösungsbasis:

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x}\sin 3x + C_3 e^{2x}\cos 3x$$

Example 71. Lösen einer HDG mit mehrfachen, komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$$

Die charakteristische Gleichung mit ihren Nullstellen ist dann:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)^2 &= 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 &= -1 + \sqrt{-1} = -1 + j \\ \lambda_3 = \lambda_4 &= -1 - \sqrt{-1} = -1 - j \end{aligned}$$

Jetzt können die Elemente der Lösungsbasis angegeben werden als:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}\sin x \\ y_2 &= xe^{-x}\sin x \\ y_3 &= e^{-x}\cos x \\ y_4 &= xe^{-x}\cos x \end{aligned}$$

Und die allgemeine Lösung ergibt sich zu:

$$y_H = C_1 \cdot e^{-x}\sin x + C_2 \cdot xe^{-x}\sin x + C_3 \cdot e^{-x}\cos x + C_4 \cdot xe^{-x}\cos x$$

16.5.2. *Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* Das Verfahren wird »Störgliedansätze« genannt, denn die Funktion auf der rechten Seite heißt Störglied.

Definition 44. Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ornung mit konstanten Koeffizienten

Definition. Sei y_P eine partikuläre (auch »spezielle«) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (IDG)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{'} + a_0 y = f(x)\ , a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

Sei y_H die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{'} + a_0 y = 0\, , a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

Dann ist

$$y_I := y_P + y_H$$

die allgemeine Lösung der IDG.

Zur Berechnung der speziellen Lösung y_P gibt es auch hier eine Methode der Variation der Konstanten[12]. Für viele häufig auftretende und damit praktisch relevante Fälle (»Standardfälle«) sind die sogenannten Störgliedansätze besser. Dabei nutzt man, dass in diesen Standardfällen das Störglied eine bestimmte Gestalt hat:

- $b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$

[12] wie bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung; siehe Kapitel 16.4.

Ansatz: (d.h. y kommt in der Differentialgleichung vor)

$$B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0$$

Ansatz im Resonanzfall: (d.h. $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ fehlen in der Differentialgleichung)

$$\left(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0\right) x^k$$

- $be^{\alpha x}$

  Ansatz: (d.h. $e^{\alpha x}$ ist keine Lösung der HDG)

  $$Be^{\alpha x}$$

  Ansatz im Resonanzfall: (d.h. $e^{\alpha x}$ ist Lösung der HDG und α ist k-fache Nullstelle der CH)

  $$Be^{\alpha x} x^k$$

- $\left(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0\right) be^{\alpha x}$

  Ansatz: (d.h. $e^{\alpha x}$ ist keine Lösung der HDG)

  $$\left(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0\right) e^{\alpha x}$$

  Ansatz im Resonanzfall: (d.h. $e^{\alpha x}$ ist Lösung der HDG und α ist k-fache Nullstelle der CH)

  $$\left(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0\right) e^{\alpha x} x^k$$

- $b_1 \cos(\beta x) + b_2 \sin(\beta x)$

  Ansatz: (d.h. $\cos(\beta x)$ und $\sin(\beta x)$ sind keine Lösungen der HDG)

  $$B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)$$

  Ansatz im Resonanzfall: (d.h. $\cos(\beta x)$ oder $\sin(\beta x)$ sind Lösungen der HDG; und $\lambda = \alpha \pm j\beta$ sind k-fache Nullstellen der CH)

  $$\left(B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)\right) x^k$$

- $\left(b_1 \cos(\beta x) + b_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x}$

  Ansatz: (d.h. $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ und $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sind keine Lösungen der HDG)

  $$\left(B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x}$$

  Ansatz im Resonanzfall: (d.h. $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ oder $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sind Lösungen der HDG; und $\lambda = \alpha \pm j\beta$ sind k-fache Nullstellen der CH)

  $$\left(B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} x^k$$

Zu diesen Störgliedansätzen: wenn y in der IDG fehlt, so spricht man von einem Resonanzfall. Das heißt: Anregung schwingender Körper durch Schwinigungen gleicher Frequenz. Im Resonanzfall sucht man sich die höchste Ableitung $y^{(k-1)}$, die auch noch fehlt und kann dann den Ansatz aufstellen:

$$x^k \left(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0\right)$$

Ist das Störglied eine e-Fuktion $be^{\alpha x}$, so spricht man dann von einem Resonanzfall, wenn $e^{\alpha x}$ gleichzeitig (spezielle) Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Sei α eine k-fache Nullstelle der charakterischen Gleichung, so ist der Ansatz im Resonanzfall:

$$Be^{\alpha x} x^k$$

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung heißen auch Schwingungsgleichungen, weil mit ihnen Schwingungen beschrieben werden können.

Example 72. Lösen einer IDG mit Störgliedansatz

Example. Die inhomogene lineare Differentialgleichung ist:

$$y'' + 2y = x^2 + 2x + 4$$

Hier soll gezeigt werden, wie man eine spezielle Lösung y_P findet: Weil das Störglied ein Polynom ist, vermutet man, dass auch y_P ein Polynom von gleichem Grad sein muss. Denn es kann z.B. keine e-Funktion sein, weil deren Ableitungen nie 0 werden, die dritte Ableitung des Störgliedes jedoch 0 ist. Also Ansatz, entsprechend der Liste der Sörgliedansätze:

$$\begin{aligned} y_P &= B_2 x^2 + B_1 x + B_0 \\ y'_P &= 2B_2 x + B_1 \\ y''_P &= 2B_2 \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen nun in die IDG einsetzen (Vorsicht vor Rechenfehlern!):

$$2B_2 + 2B_2 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 = x^2 + 2x + 4$$

Lösung mit dem Koeffzizientenvergleich: Dazu sortiert man zuerst nach Potenzen von x:

$$2B_2x^2 + 2B_1x + (2B_2 + 2B_0) = x^2 + 2x + 4$$

Diese Gleichheit kann nur gelten, wenn die Koeffizienten gleich sind (allgemein beweisbar über den Hauptsatz der Algebra). Also Gleichsetzung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 2B_2 &= 1 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2} \\ 2B_1 &= 2 \Rightarrow B_1 = 1 \\ 2B_2 + 2B_0 &= 4 \Rightarrow 2B_0 = 3 \Rightarrow B_0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die partikuläre Lösung gefunden:

$$y_P = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

Um die allgemeine Lösung der IDG zu finden, benötigt man nun noch die allgemeine Lösung y_H der zugehörigen HDG:

$$\begin{aligned} y'' + 2y &= 0 \\ \lambda^2 + 2 &= 0 \\ \lambda_1 &= j\sqrt{2} \\ \lambda_2 &= -j\sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit Lösungsbasis der HDG:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{0x}\sin\left(\sqrt{2}x\right) = \sin\left(\sqrt{2}x\right) \\ y_2 &= \cos\left(\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der HDG ist nun:

$$y_H = C_1\sin\left(\sqrt{2}x\right) + C_2\cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

Und damit ist die allgemein Lösung der IDG:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} + C_1\sin\left(\sqrt{2}x\right) + C_2\cos\left(\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

Example 73. Lösen einer IDG mit Störgliedansatz

Example. Die IDG sei:

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 4e^{2x}$$

Die zugehörige HDG ist dann:

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$$

Lösungsansatz zur HDG:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 &= 0 \\ \lambda^2(\lambda - 3) - (\lambda - 3) &= 0 \\ \left(\lambda^2 - 1\right)(\lambda - 3) &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der HDG:

$$y_H = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{3x}$$

Liegt der Resonanzfall vor? Nein, denn das Störglied e^{2x} ist keine Lösung der HDG. Damit folgt als Lösungsansatz und dessen Ableitungen:

$$\begin{aligned} y_P &= Be^{2x} \\ y_P' &= 2Be^{2x} \\ y_P'' &= 4Be^{2x} \\ y_P''' &= 8Be^{2x} \end{aligned}$$

Diese Terme werden nun in die IDG eingesetzt:

$$\begin{aligned} 8Be^{2x} - 12Be^{2x} - 2Be^{2x} + 3Be^{2x} &= 4e^{2x} \\ -3Be^{2x} &= 4e^{2x} \\ -3B &= 4 \\ B &= -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow y_P &= -\frac{4}{3}e^{2x} \end{aligned}$$

Einsetzen, um die allgemeine Lösung der IDG zu erhalten:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= -\frac{4}{3}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x} \end{aligned}$$

Example 74. Lösen einer IDG mit Störgliedansatz

Example. Gegeben ist die IDG:

$$y''' - 3y' - y' + 3y = 2e^{-x}$$

Die zugehörige HDG ist:

$$y''' - 3y' - y' + 3y = 0$$

Die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der HDG:

$$y_H = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x}$$

Weil das Störglied $2e^{-x}$ spezielle Lösung der HDG ist, muss der Störgliedansatz für den Resonanzfall verwendet werden. Dabei ist $\alpha = -1 = \lambda_1$ einfache Nullstelle ($\Rightarrow k = 1$) der charakteristischen Gleichung. Der Störgliedansatz ist damit:

$$y_P = Be^{-x}x$$

Die weiteren Ableitungen:

$$\begin{aligned} y_P' &= -Be^{-x}x + Be^{-x} \\ y_P'' &= Be^{-x}x + Be^{-x} - Be^{-x} \\ &= Be^{-x}x - 2Be^{-x} \\ y_P''' &= -Be^{-x}x + Be^{-x} + 2Be^{-x} \\ &= -Be^{-x} + 3Be^{-x} \end{aligned}$$

Dies alles einsetzen in die IDG:

$$\begin{aligned} -Be^{-x}x + 3Be^{-x} - 3Be^{-x}x + 6Be^{-x} + Be^{-x}x - Be^{-x} + 3Be^{-x}x &= 2e^{-x} \\ 8Be^{-x} &= 2e^{-x} \\ B &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Damit hat man die partikuläre Lösung gefunden:

$$y_P = \frac{1}{4}e^{-x}x$$

Für die allgemeine Lösung der IDG ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= \frac{1}{4}e^{-x}x + C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x} \end{aligned}$$

Example 75. Lösen einer IDG mit Störgliedansatz

Example. Die IDG ist

$$y''' - 4y'' + 13y' = 78x^2 + 4x + 9$$

Die zugehörige HDG wird gelöst, indem man die zugehörige charakteristische Gleichung löst:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda &= 0 \\ \lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 13\right) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2|3} &= 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3j \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der HDG:

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x} \sin(3x) + C_3 e^{2x} \cos(3x)$$

Liegt hier ein Resonanzfall vor, d.h. bei Polynomen: fehlt auf der linken Seite y?[13]. Ja, also Störgliedansatz für den Resonanzfall:

$$y_P = \left(B_2 x^2 + B_1 x + B_0\right) x$$

Die Potenz von x ganz rechts etspricht dem niedrigsten Grad der Ableitungen von y, die auf der linken Seite der IDG noch vorkommt. Die Ableitungen aus dem Störgliedansatz sind:

$$\begin{aligned} y'_P &= 3B_2x^2 + 2B_1x + B_0 \\ y''_P &= 6B_2x + 2B_1 \\ y'''_P &= 6B_2 \end{aligned}$$

$y_P, \ldots, y'''_P$ einsetzen in die IDG:

$$\begin{aligned} 6B_2 - 24B_2x - 8B_1 + 39B_2x^2 + 26B_1x + 13B_0 &= 78x^2 + 4x + 9 \\ 39B_2x^2 + (-24B_2 + 26B_1)\,x + (6B_2 - 8B_1 + 13B_0) &= 78x^2 + 4x + 9 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zur Bestimmung von B_0, B_1, B_2: Die Koeffizienten gleicher Potenzen müssen gleich sein, damit eine Gleichung mit Polynomen auf beiden Seiten erfüllt ist:

$$\begin{aligned} 39B_2 &= 78 \\ -24B_2 + 26B_1 &= 4 \\ 6B_2 - 8B_1 + 13B_0 &= 9 \end{aligned}$$

Dieses 3|3-LGS (Lineares Gleichungssystem) hat die Lösung:

$$\begin{aligned} B_2 &= 2 \\ B_1 &= 2 \\ B_0 &= 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung der IDG:

$$y_P = 2x^3 + 2x^2 + x$$

Und die allgemeine Lösung der IDG ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} y_I &= y_P + y_H \\ &= 2x^3 + 2x^2 + x + C_1 + C_2 e^{2x} \sin(3x) + C_3 e^{2x} \cos(3x) \end{aligned}$$

17. Relationen und Abbildungen

17.1. **Verwendung.** In allen Disziplinen der Informatik, wo man nicht programmiert, wird dieses Thema benötigt, v.a. in der theoretischen Informatik. In der theoretischen Informatik wird damit z.B. bewiesen, dass mit jeder Programmiersprache jedes algorithmische Problem gelöst werden kann, sofern sie eine Zuweisung und eine WHILE-Schleife zur Verfügung stellt. Und es konnte bewiesen werden, dass mit der Turing-Maschine alles berechnet werden kann.

[13] Bei den anderen Störgliedern prüft man dagegen, ob das Störglied eine Lösung der HDG ist.

17.2. **Grundlagen.**

Definition 45. kartesisches Produkt (auch: »Kreuzprodukt«)

Definition. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen. Dann ist das kartesische Produkt definiert als:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Dabei nennt man $(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel. Für gleiche Mengen A schreibt man das kartesische Produkt (mit n Faktoren) als:

$$A^n := A \times A \times \ldots \times A$$

Definition 46. Relation und darauf erklärte Operationen

Definition.

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \quad (n > 1)$$

heißt n-stellige (oder n-näre) Relation über $A_1, \ldots, A_n$. Eine Relation ist also eine Menge! Deshalb sind auf einer Relation stets die folgenden Mengenoperationen erklärt:

(1) $R_1 \cup R_2$
(2) $R_1 \cap R_2$
(3) $R_1 \subset R_2$
(4) leere Relation
(5) Ist $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$, dann heißt $\overline{R} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in A_1, \ldots, A_n \mid (x_1, \ldots, x_n) \notin R\}$ Komplement von R.

Definition 47. Notation der Tupel einer Relation

Definition. Sei $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige (auch »binäre«) Relation über den Mengen A, B. Für $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Example 76. Relation, Notation der zugehörigen Tupel als xRy nach Definition 47

Example.

$$R := \{(x, y) \mid x \text{ teilbar durch } y;\ x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

D.h. diese Relation ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann steht xRy für die Eigenschaft »x ist teilbar durch y«.

Example 77. Relation, Notation der zugehörigen Tupel als xRy nach Definition 47

Example.

$$R' := \{(x, y) \mid x \leq y;\ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$xR'y$ steht dann für $x \leq y$. Hier wurde eine bekannte Relation $\leq$ nur umbenannt.

Example 78. Eine ternäre Relation über $\mathbb{R}$

Example.

$$R'' = \{(x, y, z) \mid x + y = z;\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

R'' ist eine dreistellige (ternäre) Relation über $\mathbb{R}$.

Definition 48. n-stellige Relation über A

Definition. $R \subseteq A^n$ nennt man eine n-stellige Relation über (auch: »auf«, »in«) A.

Im Folgenden werden nur binäre Relationen behandelt.

17.3. **Produkt von Relationen, Assoziativität des Produktes.**

Definition 49. Produkt von Relationen

Definition. Seien $R_1 \subseteq A_1 \times A_2$, $R_2 \subseteq A_2 \times A_3$. Ihr Produkt (auch: »Komposition«) ist

$$R_1 \circ R_2 := \{(x, z)\} \mid \exists_y \left((x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\right)$$

Zeichen:

$\exists$: »es existiert« oder »es gibt« ein. In Literatur auch $\bigvee$.
$\forall$: »für alle«. In Literatur auch $\bigwedge$.
$\wedge$: logisches »und«
$\vee$: logisches »oder« (d.i. ein inklusives, kein exklusives »oder«).

Bemerkung: $R_1 \circ R_2$ kann leer sein! Doppelte Elemente sind zu streichen. Formulierung in Worten:

$$xR_1 \circ R_2 z \Leftrightarrow \text{es existiert ein } y \text{ mit } xR_1y \text{ und } yR_2z$$

Bemerkung: Im Allgemeinen ist das Produkt nicht kommutativ:

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$$

Example 79. Produkt von Relationen

Example. Gegeben ist

$$\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2, a_3\} \\
B &= \{b_1, b_2, b_3\} \\
C &= \{c_1, c_2\} \\
R_1 &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\} \\
R_2 &= \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_2)\}
\end{aligned}$$

Das Produkt der Relationen ist:

$$\begin{aligned}
R_1 \circ R_2 &= \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_2), (a_3, c_2)\} \\
&= \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_3, c_2)\}
\end{aligned}$$

Definition 50. Assoziativgesetz

Definition. Das Produkt von Relationen ist assoziativ:

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

Beweis. Die Gleichheit von Mengen wird normalerweise bewiesen, indem man zeigt, dass die Menge A_1 in A_2 enthalten ist und umgekehrt. Hier erfolgt ein anderer Beweis, der manchmal auch möglich ist:

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

per definitionem des Produktes gilt dann:

$$\Leftrightarrow \exists_c ((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$

und nach demselben Prinzip in weiterer Verfeinerung:

$$\Leftrightarrow \exists_c (((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)$$

da das logische »und« assoziativ ist (in »und«-Verknüpfungen müssen keine Klammern gesetzt werden!), gilt daher äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists_c ((a, b) \in R_1 \wedge ((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
&\Leftrightarrow \exists_c ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2 \circ R_3) \\
&\Leftrightarrow (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}$$

qed.

17.4. **Inverse Relation.**

Definition 51. Inverse Relation

Definition. Sei $R \subseteq A \times B$. $R^{-1} := \{(b, a) \in R\}$ heißt zu R inverse Relation.

Beispiel: Die Relation $\leq$ ist in $\mathbb{R}$ die inverse Relation zu $\geq$.

Definition 52. Eigenschaften der inversen Relation

Definition. Seien R_1, R_2 Relationen über A. Das heißt: $R_1 \subseteq A \times A$ und $R_2 \subseteq A \times A$. Dann gilt

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \tag{19}$$

und zugleich

$$\left(R_1^{-1}\right)^{-1} = R_1$$

Beweis von Gleichung 19 aus Definition 52.

$$\begin{aligned}
&(a,c) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (c,a) \in R_1 \circ R_2 \\
&\Leftrightarrow \exists_b \left((c,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_2\right) \\
&\Leftrightarrow \exists_b \left((b,c) \in R_1^{-1} \wedge (a,b) \in R_2^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists_b \left((a,b) \in R_2^{-1} \wedge (b,c) \in R_1^{-1}\right) \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a,c) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}
\end{aligned}$$

17.5. **Darstellung von Relationen.** Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned}
A &= \{1,2,3,4\} \\
B &= \{a,b,c\} \\
C &= \{\alpha,\beta\}
\end{aligned}$$

Und darauf defininiert seien die Relationen

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,a),(1,c),(2,b),(3,b),(3,c),(4,a)\} \\
R_2 &= \{(a,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha)\}
\end{aligned}$$

Diese können auf verschiedene Arten dargestellt werden:

17.5.1. *Matrix-Darstellung (auch: »Inzidenz-Matrizen«).* Hauptsächlich geeignet zur Verarbeitung mit Computern. Eine Relation wird dargestellt durch eine Matrix r_1, deren Zeilentitel die Elemente der einen Menge und deren Spaltentitel die Elemente der anderen Menge bilden. Je nachdem, ob ein Pärchen in der Relation vorkommt, steht in der Matrix an der entsprechenden Kreuzung von Zeile und Spalte eine 0 oder eine 1. Beispiel: Die Matrix r_1, die der Relation R_1 entspricht:

$$R_1 \hat{=} r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und für R_2:

$$R_2 \hat{=} r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $R_1 \circ R_2$ als Matrizenprodukt $r_1 \cdot r_2$ darstellbar, wobei man Elemente > 1 durch 1 ersetzen muss. Beachte: Die Matrizenmultiplikation muss definiert sein, d.h. die erste Matrix muss soviele Spalten wie die zweite Zeilen haben.

$$\begin{aligned}
r_1 \cdot r_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Rückübertragung in die Mengenschreibweise wäre dann:

$$R_1 \circ R_2 = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\alpha),(3,\beta),(4,\alpha)\}$$

Hier wurde eine Relation von Mengen mit verschiedener Elementzahl verwendet: $A \times B$. Werden gleiche Ausgangsmengen verwendet ($A \times A$), so ist die Matrixmultiplikation immer definiert und das Ergebnis ist eine quadratische Matrix (eine n/n-Matrix).

17.5.2. *Pfeildiagramme (gerichtete Graphen).* Diese Darstellungsart ist eher »menschenlesbar«. Siehe Abbildung 61. Hier wird die Relation R_1 dargestellt; das Pfeildiagramm zur Relation R_1^{-1} ergibt sich daraus durch Umdrehen der Pfeile. Kreuzungsfreie Darstellung der Pfeildiagramme ist durch gekrümmte Linien meist möglich, siehe Abbildung 61.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 61. Pfeildiagramm als Darstellungsart einer Relation

Example 80. Pfeildiagramm

Example. Sei $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sei $R \subseteq D \times D$ wie folgt definiert:

$$R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (5, 5)\}$$

Die Elemente $(2, 2)$ und $(5, 5)$ werden im Pfeildiagramm durch sog. »Schleifen« bzw. »Schlingen« dargestellt. Siehe Abbildung 62.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 62. Pfeildiagramm mit »Schleifen« bzw. »Schlingen«

17.6. **Spezielle Relationen in einer Menge.** Sei A eine Menge.

Definition 53. identische Relation

Definition. Die Relation $I := \{(x, x) \mid x \in A\}$ heißt identische Relation (auch: »Identität« oder »Diagonale« aufgrund der entsprechenden Matrix) über A.

Definition 54. Spezielle Eigenschaften von Relationen

Definition. Sei $R \subseteq A \times A$. R heißt

- reflexiv, wenn gilt:
$$\forall_{x \in A}\, (x, x) \in R$$
das heißt $I \subseteq R$ bzw. in Matrixdarstellung: die Hauptdiagonale ist in der Matrix enthalten
Wichtige Eigenschaft!
- irreflexiv, wenn gilt:
$$\forall_{x \in A}\, (x, x) \notin R$$
das heißt $I \cap R = \emptyset$ bzw. in Matrixdarstellung: alle Elemente der Hauptdiagonalen sind 0. Da »irreflexiv« das totale (!) Gegenteil von »reflexiv« ist, gibt es auch Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind.
- symmetrisch, wenn gilt:
$$\forall_{x,y \in A}\, ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$$
das heißt $R^{-1} \subseteq R$ bzw. in Matrixdarstellung R^T ist in R enthalten
Wichtige Eigenschaft!
- asymmetrisch, wenn gilt:
$$\forall_{x,y \in A}\, ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$$
das heißt $R^{-1} \cap R = \emptyset$ bzw. in Matrixdarstellung: kein Element von R^T ist in R enthalten. In Worten: wenn ein Pärchen in R ist, so darf das inverse nicht in R sein. In der Literatur werden manchmal Asymmetrie und Antisymmetrie vertauscht definiert. Reflexive Relationen können nie asymmetrisch sein! Wenn etwas asymmtrisch ist, dann ist es auch immer antisymmetrisch!

- antisymmetrisch, wenn gilt:
$$\forall_{x,y \in A} \left((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y \right)$$
das heißt $R^{-1} \cap R \subseteq I$ bzw. in Matrixdarstellung: alle Elemente von R^T, die in R enthalten sind, liegen auf der Hauptdiagonalen. Diese Eigenschaft ist für den Anfänger meist am schwierigsten zu erkennen. In Worten: für jedes Pärchen, das die Bedingungen erfüllt »in R und sein inverses ist in R« muss gelten, dass $x = y$ ist, damit die Relation antisymmetrisch ist.
Wichtige Eigenschaft!
- transitiv, wenn gilt:
$$\forall_{x,y,z \in A} \left((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \right)$$
das heißt $R \circ R \subseteq R$ bzw. in Matrixdarstellung: $R \cdot R = R^2$ ist in R enthalten.
Wichtige Eigenschaft!

Example 81. Eigenschaften der Relation »kleiner oder gleich«

Example.
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$$
Welche Eigenschaften aus Definition 54 hat diese Relation R und welche nicht?

- reflexiv? Ja, denn $(x, x) \in R$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- irreflexiv? Nein, denn Reflexivität schließt Irreflexivität (das Gegenteil!) aus.
- symmetrisch? Nein, denn zum Beispiel: $(2, 4) \in R$, aber $(4, 2) \notin \mathbb{R}$
- asymmetrisch? Nein, denn Gegenbeispiel: $(x, y) = (2, 2) \in R$ und $(y, x) = (2, 2) \in R$
- antisymmetrisch? Ja, denn nur für $x = y$ gilt $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$.
- transitiv? Ja, denn wenn $x \leq y \leq z$, so gilt stets $x \leq z$ (diese Formeln sind für R genau das, was die Transitivität allgemein fordert).

Definition 55. Äquivalenz und Ordnung

Definition. Eine Relation R heißt:

(1) Äquivalenz(-Relation), $\Leftrightarrow$[14] R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Äquivalenz heißt »Gleichwertigkeit«.
(2) (Halb-)Ordnung (auch: »partielle Ordnung«): $\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Das typische Beispiel ist die Relation $\leq$(Beispiel 81).
(3) strenge (Halb-)Ordnung: $\Leftrightarrow$ R ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv. Das typische Beispiel ist die Relation $<$.

Definition 56. Potenzen von Relationen

Definition. Sei $R \subseteq A \times A$. Dann ist folgendes durch vollständige Induktion (»durch Rekursion«) definiert, nämlich schrittweise:

- $R^1 := R$
- $R^2 := R \circ R$ (Induktionsverankerung)
- $R^n := R^{n-1} \circ R$, $n = 3, 4, \ldots$ (Induktionsschritt)

Aufgrund der Definition über vollständige Induktion muss jede Folgerung aus diesen Definitionen auch mit vollständiger Induktion (»schrittweise«) bewiesen werden! Aufgrund des Assoziativgesetzes folgt aus $R^n = R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n$ für alle j, k mit $j + k = n$:
$$R^n = R^j \circ R^k$$

Definition 57. Hüllenbildung

Definition. Sei $R \subseteq A \times A$.

- $R \cup I$ heißt reflexive Hülle von R.
- $R \cup R^{-1}$ heißt symmetrische Hülle von R
- $R^+ := \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ heißt transitive Hülle von R.[15]
- $R^* := \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \cup I$ heißt reflexiv-transitive Hülle von R.

Definition 58. Die kleinste reflexive (bzw. symmetrische, transitive, reflexiv-transitive) Relation

[14] $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ wird im Folgenden stets abkürzend verwendet für »definitionsgemäß genau dann, wenn«
$\Leftrightarrow$ wird im Folgenden stets abkürzend verwendet für »genau dann, wenn«.
[15] Die Symbolik $\bigcup_{i=a}^{b} A_i$ heißt: Die Vereinigung aller Mengen $A_a, \ldots, A_b$.

Definition. $R \cup I$ (bzw. $R \cup R^{-1}$, R^+, R^*) ist die kleinste reflexive (bzw. symmetrische, transitive, reflexiv-transitive) Relation, die R enthält. Da dies naheliegend ist, hier ohne Beweis.

Definition 59. Potenzen von R werden zyklisch

Definition. Sei A endlich und $R \subseteq A \times A$. Die Folge der Potenzen $R^1, R^2, \ldots$ wird irgendwann zyklisch. Das heißt, es gibt Zahlen k, m mit: $R^1, R^2, \ldots, R^k, \ldots, R^{k+m-1}$ sind paarweise verschieden und alle weiteren Potenzen sind Wiederholungen von $R^k, \ldots, R^{k+m-1}$. Siehe Abbildung 63.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 63. Potenzen einer Relation werden zylisch

Beweis:
A ist endlich
$\Rightarrow A \times A$ ist endlich. Es gilt: $R^i \subseteq A \times A$ für alle $i = 1, 2, \ldots$
$\Rightarrow$ Nicht alle R^i können verschieden sein, da $A \times A$ nur endlich verschiedene Teilmengen besitzt.
Sei nun k die kleinste natürliche Zahl, für die es eine natürliche Zahl $j > k$ gibt mit $R^j = R^k$. Sei $m = j - k$.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow & & \\ R^{k+m} &= R^k & & \mid \circ R \\ R^{k+m+1} = R^{k+m} \circ R &= R^k \circ R = R^{k+1} & & \\ usw. & \quad qed & & \end{aligned}$$

Es kann auch ganz allgemein gezeigt werden, dass Potenzen zyklisch werden, wenn irgendwo ein Assoziativgesetz gilt.

Folgerung: Für endliche Mengen A und Relationen $R \subseteq A \times A$ gilt: Es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $R^+ = \bigcup_{i=1}^{j} R^i$; $R^* = \bigcup_{i=1}^{j} R^i \cup I$. Die Definition der transitiven Hülle $\bigcup_{i=1}^{j} R^i$ und der transitiv-reflexiven Hülle $\bigcup_{i=1}^{j} R^i \cup I$ kann also bei endlichen Mengen als eine Vereinigung bis i statt bis ∞ geschrieben werden.

Example 82. Periodizität der Potenzen von Relationen

Example.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\} \\ R &= \{(a, b), (b, c), (d, a)\} \end{aligned}$$

Hier soll nun gezeigt werden, dass der Satz 59 gilt:

$$\begin{aligned} R^2 = R \circ R &= \{(a, c), (d, b)\} \\ R^3 = R^2 \circ R &= \{(d, c)\} \\ R^4 = R^3 \circ R = R^2 \circ R^2 &= \emptyset \end{aligned}$$

Das heißt weiter: $R^i = \emptyset$ für alle $i \geq 4$. Nach Satz 59 beginnt die Periodizität nach $k = 4$, mit einer Länge des Zyklus von $m = 1$.

Example 83. Beispiel für Relationen von Mengen

Example.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\} \\ R &= \{(a, b), (b, a), (c, d)\} \end{aligned}$$

Wann beginnt hier die Periodizität?

$$\begin{aligned} R^2 &= \{(a, a), (b, b)\} \\ R^3 = R^2 \circ R &= \{(a, b), (b, a)\} \\ R^4 = R^3 \circ R &= \{(a, a), (b, b)\} \end{aligned}$$

Hier ergibt sich die Periodizität nach $k = 2$ mit einer Länge des Zyklus von $m = 2$. Denn: $R^2 = R^k = R^{k+m} = R^4$.

17.6.1. *Äquivalenzen.* Definition siehe 55. Vereinbarung: man schreibt bei Äquivalenzrelationen oft xRy statt $(x,y) \in R$, denn eine der bekanntesten Äquivalenzen ist ja das Gleichheitszeichen, geschrieben als $x = y$.

Example 84. Gleichheitszeichen als Äquivalenz

Example. Das Gleichheitszeichen ist in jeder Menge eine Äquivalenz, denn (triviale und deshalb nicht zu beweisende Überlegungen):

(1) Sie ist reflexiv: Jedes Element ist zu sich selber gleich:
$$\forall_{a \in A} a = a$$
(2) Sie ist symmetrisch:
$$\forall_{a,b \in A} (a = b \Rightarrow b = a)$$
(3) Sie ist transitiv:
$$\forall_{a,b,c \in A} (a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c)$$

Example 85. Äquivalenz der Relation »Differenz teilbar durch 3«

Example. R_3 sei auf $\mathbb{Z}$ wie folgt definiert:
$$xR_3y := x - y \text{ ist durch 3 teilbar}$$
Hinweis: $z \in \mathbb{Z}$ heißt durch 3 teilbar: $\Leftrightarrow$ es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 3k$. Behauptung: R_3 ist eine Äquivalenz auf $\mathbb{Z}$. Beweis durch Nachweis der drei Eigenschaften der Äquivalenz:

(1) R_3 ist reflexiv:
Beweis: Es gilt $z - z = 0 = 3 \cdot 0 \Rightarrow zR_3z$. Es musste gezeigt werden, dass $z - z$ durch 3 teilbar ist.
(2) R_3 ist symmetrisch: Wenn (a,b) zur Relation gehört, muss auch (b,a) zur Relation gehören.
Beweis:
Sei $aR_3b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b = 3k$ für eine $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - a = 3(-k) = 3k'$
$\Rightarrow b - a = 3k' \Rightarrow bR_3a$.
(3) R_3 ist transitiv:
Beweis:
Seien $aR_3b \wedge bR_3c \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b = 3k, b - c = 3k'$ für $k, k' \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) = 3k + 3k' = 3(k + k') = 3k''$
$\Rightarrow a - c = 3k'' \Rightarrow aR_3c$

Also sind alle drei für die Äquivalenz nötigen Eigenschaften nachgewiesen.

Definition 60. Die Menge aller Brüche (rationalen Zahlen)

Definition.
$$Q := \left\{ \frac{z}{n} \mid n, z \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Definition 61. äquivalente Brüche

Definition.
$$\frac{z_1}{n_1} \cong \frac{z_2}{n_2} :\Leftrightarrow z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1$$

Example 86. Äquivalenz von Brüchen und erweiterten Brüchen

Example. Hier wird gezeigt, dass $\frac{3}{6} \neq \frac{6}{12}$, nur $\frac{3}{6} \cong \frac{6}{12}$: Die Gleicheit von Brüchen ist keine Gleicheit, sondern nur eine Äquivalenz(-relation), d.h. eine Gleichwertigkeit. Das Zeichen »$\cong$« wird hier für Äquivalenzen verwendet.

Behauptung: Die Beziehung $\cong$ zwischen Brüchen ist eine Äquivalenz. Beweis:

(1) reflexiv:
Sei $\frac{z}{n} \in Q$.
Es gilt entsprechend Definition 61: $z \cdot n = n \cdot z \Rightarrow \frac{z}{n} \cong \frac{z}{n}$
(2) symmetrisch:
Sei $\frac{z_1}{n_1} \cong \frac{z_2}{n_2} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z_1n_2 = z_2n_1$.
Da »=« symmetrisch ist gilt: $\Rightarrow z_2n_1 = z_1n_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{z_2}{n_2} \cong \frac{z_1}{n_1}$.

(3) transitiv:
Aus
$$\frac{z_1}{n_1} \cong \frac{z_2}{n_2} \wedge \frac{z_2}{n_2} \cong \frac{z_3}{n_3}$$
soll folgen dass
$$\frac{z_1}{n_1} \cong \frac{z_3}{n_3}$$
Wie geht das? Zuerst folgt per definitionem:
$$\begin{aligned} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z_1 n_2 = z_2 n_1 &\wedge\quad& z_2 n_3 = z_3 n_2 \\ &\Rightarrow z_1 n_2 n_3 = z_2 n_1 n_3 &\wedge\quad& z_2 n_3 n_1 = z_3 n_2 n_1 \\ &\Rightarrow z_1 n_2 n_3 = z_2 n_1 n_3 &=\quad& z_2 n_3 n_1 = z_3 n_2 n_1 \end{aligned}$$
Hier wurde angewandt, dass die Multiplikation von Gleichungen mit einem Faktor in $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzumformung ist. Aufgrund der Transitivität des Gleichheitszeichens folgt weiter:
$$\Rightarrow z_1 n_2 n_3 = z_3 n_2 n_1 \Rightarrow z_1 n_3 = z_3 n_1$$
Hier wurde angewandt, dass das Herauskürzen eiens Faktors aus Gleichungen in $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzumformung ist. Also gilt:
$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{z_1}{n_1} \cong \frac{z_3}{n_3}$$

Definition 62. Rest bei Ganzzahldivision

Definition. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $z = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Die Zahl r heißt »Rest von z bei Division durch m« oder kürzer »Rest von z modulo m«. (Ohne Beweis).
Man findet den Rest von r modulo m wie folgt: Bestimme die größte Zahl $q \in Z$ mit $q \cdot m \leq z$ und bilde $r = z - qm$.

Example 87. Rest bei Ganzzahldivision

Example. Zu Definition 62. Sei $m = 5$. Dann können Zahlen z in die Darstellung $z = qm + r$ zerlegt werden. Diese Darstellung ist eindeutig. Beispiele:

(1) $9 = 1 \cdot 5 + 4$
(2) $13 = 2 \cdot 5 + 3$
(3) $-4 = (-1)\,5 + 1$
(4) $-18 = (-4)\,5 + 2$

Definition 63. Kongruenz modulo m (Bezeichnung)

Definition. Zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo m ($m \in \mathbb{N}$), (in

Zeichen: $x \equiv y \pmod m$, lies: »x kongruent y modulo m«), wenn $x - y$ durch m teilbar ist, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x - y = km$.

Definition 64. Kongruenz modulo m (Erkennen)

Definition. Es gilt $x \equiv y \bmod m$ (»x kongruent y modulo m«) genau dann wenn: x und y besitzen bei Division durch m den gleichen Rest. Auch zu formulieren als: $x - y$ ist durch m teilbar. (Ohne Beweis).

Definition 65. Äquivalenz der Kongruenz modulo m

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Kongruenz mod m ist eine Äquivalenz auf $\mathbb{Z}$.

Beweis[16]. Wieder bestehend aus drei Teilbeweisen:

(1) »≡« ist reflexiv: Sei $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - x = 0 = 0 \cdot m \Rightarrow x \equiv x \pmod m$.
(2) »≡« ist symmetrisch:
Sei $x \equiv y \pmod m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow y - x = (-k)\,m$
$\Rightarrow y \equiv x \pmod m$

[16]Die verallgemeinerte Form des für die Relation »Differenz teilbar durch 3« geführten Beweises der Äquivalenz in Beispiel 85.

(3) »≡« ist transitiv:
Sei $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\; m) \wedge y \equiv z \,(\mathrm{mod}\; m)$ (Zu zeigen: $x \equiv z \,(\mathrm{mod}\; m)$)
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y = mk \wedge y - z = mk'$
$\Rightarrow x - z = (x - z) + (y - z) = mk + mk' = m\,(k + k') = mk''$
$\Rightarrow x - z = mk'$
$\Rightarrow x \equiv z \,(\mathrm{mod}\; m)$

Die Kongruenz wird von der Äquivalenz deshalb unterschieden, weil man mit Kongruenzen wie mit Rechenoperationen rechnen kann; wählt man $m = 2$, so befindet man sich z.B. im Zweiersystem.

Definition 66. Äquivalenzklasse

Definition. Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenz. Sei $x \in A$. Dann heißt die Menge der zu x äquivalenten Elemente aus A (in Zeichen: $[x] := [x]_R := \{y \mid (x, y) \in R\}$) die Äquivalenzklasse von x modulo R (auch: »nach R«, »bezüglich R«).
Merke: x ist in seiner Äquivalenzklasse enthalten ($x \in [x]_R$). Warum? Weil R eine Äquivalenz und damit immer reflexiv ist (d.h. $(x, x) \in R$).

Definition 67. Wichtiger Satz über Äquivalenzen

Definition. Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenz. Seien $x, y \in A$. Dann können sich die verschiedenen Äquivalenzklassen, aus denen A besteht, nicht überlappen: entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$. Siehe Abbildung 64.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 64. Keine Überlappung der Äquivalenzklassen

Beweis zu Definition 67: Wir nehmen an, dass zwei Äquivalenzklassen einen nicht leeren Durchschnitt haben und zeigen, dass dann beide Äquivalenzklassen identisch sein müssen. Also angenommen:

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset$$

- Wegen Reflexivität der Äquivalenz gilt: $y \in [y]$. Wir wollen nun zeigen: $y \in [x]$: Sei ein beliebiger Repräsentant der Schnittmenge

$$\begin{aligned} z &\in [x] \cap [y] \\ \Rightarrow (x, z) &\in R \\ \wedge\, (y, z) &\in R \end{aligned}$$

- Wegen Symmetrie gilt nun: $(z, y) \in R$.
- Aufgrund der Transititvität gilt nun: $(x, y) \in R$. Daraus folgt:

$$y \in [x] \tag{20}$$

- Nun zeigen wir: $[y] \subseteq x$
  - Sei u beliebig aus $[y]$. Das heißt: $(y, u) \in R$
  - Aus Gleichung 20 wissen wir bereits: $(x, y) \in R$.
  - Aufgrund der Transitivität von R gilt nun: $\Rightarrow (x, u) \in R \Rightarrow u \in [x]$. Weil nun u beleibig aus $[y]$ gewählt war, gilt nun $[y] \subseteq [x]$. Analog zeigt man nun: $[x] \subseteq [y]$. Daraus folgt: $[x] = [y]$. Also: wenn zwei Äquivalenzklassen keinen leeren Durchschnitt haben sollen, so müssen sie nach diesem Beweis gleich sein.

Definition 68. Disjunkte Mengen

Definition. Zwei Mengen A, B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Definition 69. Zerlegung von A (auch: »Partition von A«)

Definition. Sei A eine Menge. Die disjunkten Teilmengen, deren Vereinigung A bilden, heißen eine Zerlegung von A. Dies gilt auch für unendliche Mengen wie $\mathbb{R}$; um hier auch eine Zerlegung in Teilmengen durchführen zu können, führt man (unendliche oder endliche) Indexmengen ein: Sei

$$\Pi := \{A_k \mid k \in K\}$$

eine Menge von Teilmengen von A mit folgenden Eigenschaften:

- $$A = \bigcup_{k \in K} A_k$$
- die A_k sind paarweise disjunkt.

Dann heißt Π eine Zerlegung (»Partition«) von A. K heißt Indexmenge von Π.

Definition 70. Die Äquivalenzklassen als Partition

Definition. Die Menge der Klassen einer Äquivalenz R auf einer Menge A bildet eine Partition. In Zeichen:

$$A/R$$

Lies: »A modulo R« oder »Faktorraum von A nach R« oder »A zerlegt nach R«.

Definition 71. Erkennen einer Äquivalenz an disjunkten Teilmengen

Definition. Sei $\Pi = \{A_k \mid k \in K\}$ eine Partition von A. Sei $R = \{(x, y) \mid \text{es gibt ein } k \in K \text{ mit } x, y \in A_k\}$. Dann gilt: R ist eine Äquivalenz und $\Pi = A/R$. Wenn also eine in disjunkte Teilmengen zerlegte Menge A vorliegt, so sind zwei Elemente der gleichen Teilmenge äquivalent. Das heißt: Jede Zerlegung ist mit einer Äquivalenz zu beschreiben.

Beweis: (hier handelt es sich um sofort einsichtige Trivialitäten)

- R ist reflexiv: Da $A = \bigcup_{k \in K} A_k$ existiert zu jedem $x \in A$ ein $k \in K$ mit $x \in A_k$. Daraus folgt: $(x, x) \in R$.
- R ist symmetrisch: Sei $(x, y) \in R \Rightarrow$ es existiert ein k mit x, $y \in A_k$. Daraus folgt als Trivialität: $\Rightarrow y, x \in A_k \Rightarrow (y, x) \in R$.
- R ist transitiv: Sei $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$.
  $\Rightarrow$ es existiert ein $i \in K$ und ein $j \in K$ mit $x, y \in A_i$ und $y, z \in A_j$.
  $\Rightarrow y \in A_i \cap A_j$, das heißt $A_i \cap A_j \neq \emptyset$
  $\Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow x, y, z \in A_i$ und damit folgt $(x, z) \in R$

Bemerkung: Sei $m \in \mathbb{N}$. Elemente $x, y \in \mathbb{Z}$, die bei Division durch n den gleichen Rest liefern heißen äquivalent (oder: »kongruent«) modulo m. (Dies wurde bereits definiert). In Zeichen:

$$x \equiv y \,(\text{mod } m)$$

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{Z}/_{(m)}$ (hier: »$\mathbb{Z}$ modulo m«, auch »Restklassenmenge modulo m«) anstelle $\mathbb{Z}/_{\equiv}$ bezeichnet. Da es bei Division durch m genau die Reste $0, 1, \ldots, m-1$ Reste gibt, gilt folgende Partition der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z}/_{(m)} = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}$$

Beachte: Die Äquivalenzklasse $[i]$ ist die Menge aller $z \in \mathbb{Z}$ mit Rest i bei Division durch m.

Example 88. Restklassenmenge modulo 5

Example.

$$m = 5$$
$$\mathbb{Z}/_{(5)} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

mit

$$\begin{aligned} [0] &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} \\ [3] &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} \\ [4] &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\} \end{aligned}$$

Es gilt: Die Mengen $[0] \ldots [4]$ sind disjunkt und ihre Vereinigung ist $\mathbb{Z}$.

Beachte: Bei der Darstellung einer Äquivalenzklasse durch $[x]$ ist es egal, welchen Repräsentanten x man wählt. Es gilt nämlich nach obigem Beispiel: $[0] = [-5] = [15]$.

Mit Äquivalenzklassen kann man rechnen: So sind die Äquivalenzklassen modulo 2 das Zweiersystem, man kann darin rechnen.

Definition 72. Feinere Zerlegung einer Menge

Definition. Seien Π und Π' Zerlegungen einer Menge A. Π heißt »feiner als Π'« (in Zeichen $\Pi \leq \Pi'$), wenn zu jedem $P \in \Pi$ ein $P' \in \Pi'$ mit $P \subseteq P'$ existiert[17]. Anschaulich: siehe Abbildung 65.

Definition 73. Erkennen der Feinheit von Äquivalenzklassen

Definition. Seien R, R' Äquivalenzen auf A. Sei $\Pi := A/R$ und $\Pi' := A/R'$. Wie sieht man einer Äquivalenz an, ob die zugehörigen Äquivalenzklassen feiner sind als die einer anderen Äquivalenz? Es gilt:

$$R \subseteq R' \Leftrightarrow \Pi \leq \Pi'$$

(ohne Beweis)

Example 89. Erkennen der Feinheit von Äquivalenzklassen

Example.

$$\begin{aligned} R_8 &:= \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \,(\mathrm{mod}\ 8)\} \\ R_4 &:= \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \,(\mathrm{mod}\ 4)\} \end{aligned}$$

Man vergleiche nun $\mathbb{Z}/R_8 = \mathbb{Z}/_{(8)}$ und $\mathbb{Z}/R_4 = \mathbb{Z}/_{(4)}$. Es gilt (vgl. Abbildung 66):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/_{(8)} &\leq \mathbb{Z}/_{(4)} \\ [0]_8 \,, [4]_8 &\subseteq [0]_4 \end{aligned}$$

Anwendung der der Definition 73: In diesem Beispiel wurde aus Definition 65 begründet, dass $\mathbb{Z}/_{(8)} \leq \mathbb{Z}/_{(4)}$. Daraus muss nach Definition 73 folgen, dass $R_8 \subseteq R_4$. Hat R_4 tatsächlich gleich viele oder mehr Tupel als Elemente als R_8? Ja: Die Tupel von R_4 bilden sich aus jedem $x \in \mathbb{Z}$ mit jedem $y \in \mathbb{Z}$ im Abstand $4m, m \in \mathbb{N}$ dazu, die von R_8 aber nur mit jedem $y \in \mathbb{Z}$ im Abstand $8m, m \in \mathbb{N}$ dazu, das ergibt natürlich nur halb so viele Tupel.

17.7. **Algebraische Strukturen.** Hier behandelt werden: Gruppen, Halbgruppen, Ringe, Körper

Definition 74. Gruppe[18]

Definition. Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G zusammen mit einer 2-stelligen Operation $\circ$, wobei folgende Axiome[19] gelten sollen (wenn die ersten vier Eigenschaften $VANI$ gegeben sind, spricht man schon von einer Gruppe; ist die fünfte Eigenschaft, die Kommutativität, zusätzlich gegeben, spricht man von einer kommutativen Gruppe ($VANIK$, auch »Abelsche Gruppe«)):

- V: das »Verknüpfungsgesetz« (auch: »Verknüpfungsaxiom«)

$$\forall_{x,y \in G} x \circ y \in G$$

- A: das Assoziativgesetz

$$\forall_{x,y,z \in G} \, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

  Die Matrizenmultiplikation ist z.B. assoziativ, aber im Normalfall nicht kommutativ.

[17] Beachte: Die Elemente (z.B. P, P') der Indexmenge Π sind selbst Mengen.

[18] Wiederholend aus der Vorlesung Mathematik 1.

[19] Axiome sind Gesetze, die man nicht beweist; ihre Geltung wird vereinbart, alle anderen Gesetze müssen mit den Axiomen bewiesen werden.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 65. Feinere Zerlegung einer Menge

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

Abbildung 66. Beispiel zu unterschiedlicher Feinheit von Äquivalenzklassen

- N: Existenz eines neutralen Elementes
$$\forall_{x \in G} \exists_{n \in G} n \circ x = x \circ n = x$$
Man muss nur entweder $n \circ x$ oder $x \circ n$ axiomatisch fordern, die andere folgt daraus. Bei der Multiplikation ist das neutrale Element die 1, bei der Addition die 0. Daher heißt das Neutrale Element auch »Nullelement« oder »Einselement«.
- I: Existenz des Inversen Elements
$$\forall_{x \in G} \exists_{x^* \in G} x \circ x^* = x^* \circ x = n$$
Man muss nur entweder $x \circ x^*$ oder $x^* \circ x$ axiomatisch fordern, die andere folgt daraus. Bei der Multiplikation ist das Inverse Element x^{-1}, bei der Addition $-x$; manchmal findet man daher auch diese Symbolik statt x^*.
- K: Kommutativgesetz. Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt kommutative Gruppe, wenn zusätzlich gilt:
$$\forall_{x,y \in G} x \circ y = y \circ x$$
Für die Operation »$\circ$« schreibt man bei kommutativen Gruppen (Abelschen Gruppen) oft das Pluszeichen (und für das Neutrale Element dann 0, für das inverse zu $x \in G$ dann $-x$), das Malzeichen verwendet man bei allen anderen Gruppen oder wenn ein Axiom nicht gilt.

Example 90. Matrixaddition ist eine Gruppe

Example. Sei $(M_{n \times n}, +)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Matrixaddition $+$. $(M_{n \times n}, +)$ ist eine kommutative (oder »Abelsche«) Gruppe. Beweis durch Beweisen der Axiome $VANIK$:

- V: Gilt aufgrund folgender elementweiser Definition der Matrixaddition; das Ergebnis ist wieder eine $n \times n$-Matrix.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$
- A: Gilt, denn aufgrund elementweiser Addition kann die Matrixaddition zurückgeführt werden auf die Assoziativität der Addition in $\mathbb{R}$.
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
- N: Das Neutrale Element heißt »Nullmatrix« $0_{n \times n}$.
$$0_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
Aufgrund positionsweiser Addition gilt, weil 0 das Neutrale Element in $\mathbb{R}$ ist:
$$A + 0_{n \times n} = 0_{n \times n} + A = A$$
- I: Das Inverse Element zur Matrix $A = (a_{ij})$[20] ist $-A := (-a_{ij})$. Es ist klar, dass $A + (-A) = 0_{n \times n}$.
- K: Das Kommutativgesetz $A + B = B + A$ gilt, weil positionsweise reelle Zahlen addiert werden und für diese das Kommutativgesetz gilt.

Example 91. Matrixmultiplikation ist keine Gruppe

Example. $(M_{n \times n}, \cdot)$, wobei »$\cdot$« die Matrix-Multiplikation ist, ist keine Gruppe. Überprüfung:

- V: Ein Element in der Ergebnismatrix ergibt sich aus der Multiplikation der jeweiligen Zeile der ersten und der jeweiligen Spalte der zweiten Matrix.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{j1} & \dots & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{jn} \end{pmatrix}$$
Das Verknüpfungsaxiom gilt also, denn die Ergebnismatrix ist wieder eine $n \times n$-Matrix.

[20] Man beachte diese weitere Möglichkeit der Schreibweise für Matrizen.

- A:

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}\right]$$

  Auch dies gilt und kann analog zum Verknüpfungsaxiom bewiesen werden; es können nämlich aufgrund der Kommutativität in $\mathbb{R}$ die entstehenden Doppelsummenzeichen vertauscht werden. Beweis bleibt dem Leser überlassen.
- N: Das Neutrale Element ist die Einheitsmatrix, die nur auf der Hauptdiagonalen aus 1 besteht und sonst mit 0 belegt ist:

$$E_n = E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- I: Gibt es zu jeder Matrix eine inverse Matrix? Nein, sondern nur wenn die Determinante $D \neq 0$ ist, hat die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1}[21]. Solche heißen reguläre Matrizen, die anderen singuläre Matrizen. Also ist $(M_{n\times n}, \cdot)$ keine Gruppe, sondern eine sog. »Halbgruppe mit Einselement« - Eigenschaften, die zusätzlich zu den durch die Halbgruppe geforderten gelten, werden meist gesondert angegeben.

Definition 75. Halbgruppen

Definition. Eine Halbgruppe $(H, \cdot)$ ist eine Menge H zusammen mit einer zweistelligen Operation $\cdot$, wobei gilt: V (das Verknüpfungsaxiom) und A (das Assoziativgesetz).

Example 92. Eine nicht-Abelsche Gruppe

Example. Sei $\left(M^{reg}_{n\times n}, \cdot\right)$ die Menge der regulären[22] $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Matrix-Multiplikatzion $\cdot$. $\left(M^{reg}_{n\times n}, \cdot\right)$ ist dann eine Gruppe, die nicht kommutativ ist: eine »nicht-kommutative« oder »nicht-Abelsche« Gruppe. Denn: Nach Beispiel 91 gelten die Axiome V, A, N. Für reguläre Matrizen existiert auch A^{-1} (d.h. $A \cdot A^{-1} = E_{n\times n}$). Es gilt aber nicht das Kommutativitätsgesetz K; Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aber nach Vertauschung der Faktoren ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 76. Ring

Definition. Ein Ring $(G, +, \cdot)$ ist eine Menge zusammen mit zwei 2-stelligen Operationen $+$ und $\cdot$, wobei gilt:

(1) $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei das Neutrale Element mit 0 und das Inverse Element von $x \in G$ mit $-x$ bezeichnet wird. Das heißt, es gilt für alle $x, y, z \in G$:
   - V: $x + y \in G$
   - A: $(x + y) + z = x + (y + z)$
   - N: $x + 0 = 0 + x = x$
   - I: $x + (-x) = (-x) + x = 0$
   - K: $x + y = y + x$

(2) $(G, \cdot)$ ist eine Halbgruppe. Das heißt, es gilt für alle $x, y \in G$:
   - V: $x \cdot y \in G$
   - A: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(3) Es gelten die Distributivgesetze (die die beiden definierten Operationen wie bei den Zahlen miteinander verbinden):

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= xy + xz \\ (y + z) \cdot x &= yx + zx \end{aligned}$$

   Die Reihenfolge ist wichtig, denn das Kommutativitätsgesetz gilt nicht!

[21]Stoff der Vorlesung Mathematik 1.
[22]Eine Matrix A heißt regulär, wenn die Determinante von $A \neq 0$ ist.

Kurz: Ein Ring ist eine Menge mit $+$ und $\cdot$, wobei gilt:

für $+$**::** $VANIK$
für $\cdot$**::** VA

und es gelten die Distributivgesetze

Definition 77. Kommutativer Ring, Ring mit Eins

Definition. $(G, +, \cdot)$ heißt

kommutativer Ring: $:\Leftrightarrow$ die Multiplikation kommutativ ist (die Addition ist ohnehin kommutativ).
Ring mit Eins: $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Einselement 1 mit $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in G$.

Example 93. Ring mit Eins

Example. $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ ist die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen mit der Matrix-Addition $+$ und der Matrix-Multiplikation $\cdot$. Sie bilder einen Ring mit 1 (gemeint: die Einheitsmatrix), der nicht kommutativ ist.

Definition 78. Körper

Definition. Ein Ring $(G, +, \cdot)$ heißt »Körper« (engl. field, deshalb auch deutsch manchmal »Feld«), wenn bezüglich der Multiplikation gilt:

- Kommutativgesetz
- Existenz des Einselementes
- Zu jedem $x \in G$, $x \neq 0$ existiert ein inverses Element x^{-1}.

Zusammenfassung: Körper. $(G, +, \cdot)$ ist ein Körper $:\Leftrightarrow$

- $VANIK$ für $+$
- $VANIK$ für $\cdot$ (kein Inverses zu 0, d.h. in $G \setminus \{0\}$)
- Distributivgesetze

Zusammenfassung: Ring. $(G, +, \cdot)$ ist ein Ring $:\Leftrightarrow$

- $VANIK$ für $+$
- VA für $\cdot$
- Distributivgesetze

Example 94. Beispiele für Körper und Ringe

Example.

- $\mathbb{R}$ ist ein Körper
- $\mathbb{Q}$ ist ein Körper
- $\mathbb{Z}$ ist ein Ring. Das einzige Gesetz, was für einen Körper fehlt, ist die Existenz des Inversen I für die Multiplikation. Denn es gilt in $\mathbb{Z}$:
  - $VANIK$ für $+$
  - $VANK$ für $\cdot$
  - Distributivgesetze

  Man bezeichnet $\mathbb{Z}$ aufgrund der zusätzlichen Eigenschaften N, K für $\cdot$ als »kommutativen Ring mit Eins«.

17.7.1. *Der euklidische Algorithmus in* $\mathbb{Z}$. Weil dieser sog. »euklidische Algorithmus« zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) in $\mathbb{Z}$ funktioniert, bezeichnet man $\mathbb{Z}$ als euklidischen Ring. Sei $t = \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$ der größte gemeinsame Teiler von $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$. Man berechnet t über den euklidischen Algorithmus:

Example 95. euklidischer Algorithmus

Example. Seien $a_0 = 374$ und $a_1 = 289$. Sei $a_0 \geq a_1$. Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned} 374 &= 1 \cdot 289 + 85 \\ 289 &= 3 \cdot 85 + 34 \\ 85 &= 2 \cdot 34 + 17 \\ 34 &= 2 \cdot 17 \end{aligned}$$

Wenn die Division ohne Rest aufgeht, darf man wie hier schließen: $17 = \mathrm{ggT}(374, 289)$.

Verfahren des euklidischen Algorithmus. Sei $|a_0| \geq |a_1|$. Bestimme ganze Zahlen q_i und a_{i+1} mit

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1 a_1 + a_2 \text{ mit } 0 \leq |a_2| < |a_1| \\ a_1 &= q_2 a_2 + a_3 \text{ mit } 0 \leq |a_3| < |a_2| \\ a_2 &= q_3 a_3 + a_4 \text{ mit } 0 \leq |a_4| < |a_3| \end{aligned}$$

und so weiter bis $a_k = 0$:

$$\begin{aligned} a_{k-2} &= q_{k-1} a_{k-1} + 0 \\ \Rightarrow a_{k-1} &= \operatorname{ggT}(a_0, a_1) \end{aligned}$$

Example 96. Berechnung des ggT von 96 und 35

Example. $a_0 = 96$ und $a_1 = 35$

$$\begin{aligned} 96 &= 2 \cdot 35 + 26 \\ 35 &= 1 \cdot 26 + 9 \\ 26 &= 2 \cdot 9 + 8 \\ 9 &= 1 \cdot 8 + 1 \\ 8 &= 8 \cdot 1 + 0 \\ \Rightarrow 1 &= \operatorname{ggT}(96, 35) \end{aligned}$$

Wenn $\operatorname{ggT}(a_0, a_1) = 1$, so heißen a_0, a_1 teilerfremd.

Definition 79. Darstellungsform des $\operatorname{ggT}(a_0, a_1)$

Definition. Zu $t = \operatorname{ggT}(a_0, a_1)$ gibt es ganze Zahlen λ, μ mit $t = \lambda a_0 + \mu a_1$.

Beweis von Definition 79 über vollständige Induktion: Betrachte den euklidischen Algorithmus.

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2 \tag{21}$$
$$a_1 = q_2 a_2 + a_3 \tag{22}$$
$$a_2 = q_3 a_3 + a_4 \tag{23}$$
$$a_3 = q_4 a_4 + a_5 \tag{24}$$

(1) Löse Gleichung 21 nach a_2 auf und setze in Gleichungen 22 und 23 ein.
(2) Löse Gleichung 22 nach a_3 auf und setze in Gleichungen 23 und 24 ein.
(3) Löse Gleichung 23 nach a_2 auf und einsetzen analog zu oben. Am Ende entsteht:

$$t = \lambda a_0 + \mu a_1$$

Example 97. Zahl in der Form $t = \lambda a_0 + \mu a_1$

Example. Seien $a_0 = 374$, $a_1 = 289$

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + 85 \Rightarrow 85 = a_0 - a_1 \tag{25}$$
$$a_1 = 3 \cdot 85 + 34 \tag{26}$$
$$85 = 2 \cdot 34 + 17 \tag{27}$$

Indem man Gleichung 25 für 85 in Gleichung 26 einsetzt, erhält man:

$$a_1 = 3a_0 - 3a_1 + 34 \Rightarrow 34 = 4a_1 - 3a_0 \tag{28}$$

Indem man Gleichung 25 für 85 in Gleichung 27 einsetzt, erhält man:

$$a_0 - a_1 = 2 \cdot 34 + 17 \tag{29}$$

Indem man Gleichung 28 für 85 in Gleichung 29 einsetzt, erhält man die Darstellung in der Form $t = \lambda a_0 + \mu a_1$:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= 8a_1 - 6a_0 + 17 \\ \Rightarrow 17 &= 7a_0 - 9a_1 \end{aligned}$$

also $\lambda = 7$, $\mu = -9$

17.7.2. *Der Restklassenring Z_m (Das Rechnen mit Resten).* Was sind die Reste von Summen $x+y$, wenn die Reste von x und y bekannt sind? Da die Berechnung solcher Reste von Summen einfach möglich sind und kleine Zahlen liefert, geht man dazu über, nur noch mit den Resten statt mit den Summen zu rechnen. Es kann gezeigt werden, dass diese Reste einen Ring bilden und - wenn der Teiler eine Primzahl ist - sogar ein Körper. Die Anwendung geschieht z.B. bei fehlerkorrigierenden Codes.

Definition 80. Grundlage für das Rechnen mit Resten

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/_{(m)} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$.[23] Für beliebige $x \in [i]$ und $y \in [j]$ gilt:

$$x + y \in [i+j]$$
$$x \cdot y \in [i \cdot j]$$

Beweis zu Definition 80. Beweis zu $x + y \in [i+j]$: Sei $x \in [i]$ und $y \in [j]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x - i = km \quad \wedge \quad & y - j = k'm \\
\Rightarrow x - i + y - j \quad &= \quad (k+k')\, m \\
\Rightarrow (x+y) - (i+j) \quad &= \quad k''m \\
\Rightarrow (x+y) \quad &\equiv \quad (i+j) \mod m \\
\Rightarrow (i+j) \quad &\equiv \quad (x+y) \mod m \\
\Rightarrow x + y \quad &\in \quad [i+j]
\end{aligned}$$

Beweis zu $x \cdot y \in [i \cdot j]$: Sei $x \in [i]$ und $y \in [j]$

$$\Rightarrow x - i = km \wedge y - j = k'm$$

Man probiert nun herum, z.B. durch Multiplikation dieser Gleichungen mit je einem konstanten Faktor y oder i, um eine Gleichung zu erhalten, die $(i \cdot j)$ und $(x \cdot y)$ enthält:

$$\begin{aligned}
xy - iy &= kym \\
iy - ij &= k'im
\end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert nun:

$$\begin{aligned}
xy - ij &= (ky + k'i)\, m \\
&= k''m \\
\Rightarrow xy &\in [ij]
\end{aligned}$$

Example 98. Addition und Multiplikation im Restklassenring Z_5

Example. $m = 5$, dann ist $Z/_{(5)} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$. Jede Zahl $z \in \mathbb{Z}$ liegt nun in einer der Äquivalenzklassen, entsprechend ihres Restes bei Division durch $m = 5$:

- $8 \in [3]$
- $-9 \in [1]$ Die Äquivalenzklasse negativer Zahlen erhält man also, indem man die kleinste durch m teilbare und betragsmäßig größere Zahl addiert: $-9 + 10 = 1$.
- $7 \in [2]$, $18 \in [3]$ also $7 + 18 \in [2+3] = [0]$
- $7 \in [2]$, $-6 \in [4]$ also $7 \cdot (-6) \in [2 \cdot 4] = [3]$

Definition 81. gekürzter Weg zur Äquivalenzklasse des Ergebnisses[24]

Definition. Sei $x, y \in \mathbb{Z}$. Interessiert man sich nur für die Reste von $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ modulo m, dann kann man bereits vor und während der Rechnung alle Operanden und Zwischenergebnisse nach Belieben durch ihre Reste ersetzen.

Example 99. Rechnen mit Resten: Addition

Example. $m = 5$. Wir wollen den Rest von $7 + 9$ wissen, und schreiben unter Verwendung des Kongruenzzeichens $\equiv$ »kongruent modulo $m = 5$«:

$$7 + 9 \equiv 2 + 4 = 6 \equiv 1 \mod 5$$

oder

$$7 + 9 = 16 \equiv 1 \mod 5$$

Example 100. Rechnen mit Resten: Multiplikation

[23] Wiederholung, s.o.: Die Kongruenz zweier Zahlen »$x \equiv y \mod m :\Leftrightarrow x - y$ ist durch m teilbar« ist eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse $x \in \mathbb{Z}$ ist dann $[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \mod m\}$.

[24] Eine Folgerung aus Beispiel 98.

Example. $m = 5$.

$$7 \cdot 9 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 3 \bmod 5$$

oder

$$7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \bmod 5$$

Definition 82. Restklassenring, Restklassenkörper und vereinfachte Schreibweisen

Definition. Sei $Z_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Das heißt, wir ersetzten die Klasse $[i]$ in der Schreibweise durch ihren Repräsentanten i. Für $i, j, k \in Z_m$ setzen wir

$$i + j = k :\Leftrightarrow i + j \equiv k \bmod m$$

$$i \cdot j = k :\Leftrightarrow i \cdot j \equiv k \bmod m$$

Dies darf nur geschrieben werden, weil und solange wir uns in der Menge Z_m befinden! Dies sind gleichzeitig die Definitionen der Operationen für die Ringe / Körper. Die Menge Z_m heißt der Restklassenring modulo m. Ist m eine Primzahl, so heißt Z_m Restklassenkörper! Denn es gilt:

Definition 83. Rechnen mit Resten: Restklassenring

Definition. $(Z_m, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1. »mit 1« heißt: mit neutralem Element bzgl. $\cdot$. Beweis: Nachrechnen unter Verwendung von Definition 80. Zu einem Körper fehlt also nur noch das inverse Element I der Multiplikation!

Definition 84. Rechnen mit Resten: Restklassenkörper

Definition. Wenn m eine Primzahl ist, dann ist Z_m ein Körper. m ist eine Primzahl genau dann wenn $(Z_m, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Beweis zu Definition 84: Wenn m eine Primzahl ist, ist Z_m ein Körper. Es ist nur noch nachzuweisen, dass ein inverses Element I der Multipliktion gibt (da Definition 83 vorausgesetzt wird). Beachte: Alle folgenden Rechenoperationen geschehen im Restklassenring Z_m, d.h. alle Zahlen und Ergebnisse dürfen auf ihre Reste verkürzt werden.
Sei $x \in Z_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, $x \neq 0$.
Sei m eine Primzahl. Da $x < m$ gilt damit $1 = \text{ggT}(x, m)$
nach Definition 79folgt: $\Rightarrow 1 = \lambda x + \mu m$
$\Rightarrow 1 = \lambda x$
mit $\lambda = x^*$ (d.h. sei x^* der Rest von $\lambda \bmod m$) gilt: $1 = x^* x$ in Z_m
Da Z_m als Restklassenring ja kommutativ ist, gilt: $1 = x x^*$ in Z_m.
$\Rightarrow x^*$ ist Inverses zu x, d.h. I gilt in Z_m bezüglich »$\cdot$«.

Beweis zu Definition 84: Wenn Z_m ein Körper ist, ist m eine Primzahl. Dieser Beweis wird als Widerspruchsbeweis geführt:

- Sei Z_m ein Körper.
- Angenommen m ist keine Primzahl. Dann gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit
  - $1 < a < m$, $1 < b < m$
  - $ab = m$
- Was gilt unter dieser Voraussetzung in Z_m?
  - $a, b \in Z_m$ denn $1 < a < m$, $1 < b < m$
  - $a \neq 0$, $b \neq 0$ denn $1 < a$, $1 < b$
  - $ab = 0$ (andere Schreibweise für $ab \equiv m \bmod m = 0$).
- Da nach Voraussetzung Z_m ein Körper ist, existiert zu a ein a^* mit $aa^* = 1$.
- Nun gilt in Z_m:

$$\begin{aligned} b &= 1 \cdot b \\ &= (a^* a)\, b \\ &= a^* (ab) \\ &= a^* \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Wiederspruch zu $b \neq 0$.
- Also war unsere Annahme, m sei keine Primzahl, falsch. Also ist m eine Primzahl.

Definition 85. Wann ein Produkt in einem Körper 0 ist

Definition. In jedem Körper gilt:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$$

Definition 86. Inverses Element der 0

Definition. Beachte: 0 besitzt nie ein Inverses bezüglich der Multiplikation.

Definition 87. Division in einem Restklassenkörper

Definition. Sei p eine Primzahl. Dann gilt: In Z_p ist eine Division möglich! Sei $x \in Z_p$, $x \neq 0$. Man setzt dann $\frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$. In Literatur über fehlerkorrigierende Codes wird verwendet: Z_p heißt auch »Primkörper der Charakteristik p« oder »Galois-Feld $GF(p)$«[25]. Wichtig für die Informatik ist nur der Restklassenkörper $Z_2 = \{0, 1\}$. Die Operationstabelle in diesem Körper ist dann:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

In der Schaltalgebra wird

- die Operation $x + y$ als $x \oplus y$ geschrieben und als XOR (oder »Exor«) bezeichnet, d.i. ein exklusives Oder.
- die Operation $x \cdot y$ als $x \wedge y$ geschrieben und als AND bezeichnet, d.i. ein logisches Und.

Die Schaltzeichen hierzu werden als bekannt vorausgesetzt.

Example 101. Rechnen mit Restklassen

Example. Sei $Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, d.h. Z_7 ist ein Körper.

- Bilden Sie für jedes $z \in Z_7$ sämtliche Potenzen z^k.

z^1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6
0	...				
1	...				
2	4	1			
3	2	6	4	5	1
4	2	1			
5	4	6	2	3	1
6	1				

  Manche Potenzen liefern hier alle Zahlen des Körpers, manche nicht. Ein Zyklus endet stets mit einer Potenz $z^n = 1$ und beginnt dann von neuem.
- Wieviele verschiedene Potenzen besitzt jedes $z \in Z_7$ (und allgemein jedes $z \in Z_p$)?
  Die Anzahl der Elemente in Z_7 ist $|Z_7| = 7$. Jedes $z \neq 0$ hat dann höchstens $7 - 1 = 6$ verschiedene Potenzen, da $z^k \neq 0$ für alle $z \neq 0$ gelten muss, d.h. der Faktor 0 darf nicht auftauchen.
  Allgemein: $|Z_p| = p$. Davon sind $p - 1$ Elemente $\neq 0$. Für $z \neq 0$ gibt es höchstens $p - 1$ verschiedene Potenzen.
- Geben sie z^{-1} an für jedes $z \in Z_7$, $z \neq 0$.
  Wenn eine Potenz $z^k = 1$ ist, so folgt: $z^k = z^{-1}z = 1 \Rightarrow z^{-1} = z^{k-1}$. Damit sind sie inversen Elemente nach obiger Tabelle abzulesen:
  - $z = 0$: kein Inverses
  - $1^{-1} = 1$
  - $2^{-1} = 4 = z^2$
  - $3^{-1} = 5$
  - $4^{-1} = 2$
  - $5^{-1} = 3$
  - $6^{-1} = 6$

Definition 88. Existenz des Inversen in einem Restklassenkörper

Definition. Sei $z \in Z_p$, $z \neq 0$. Dann existiert ein $k \geq 1$ mit $z^k = 1$. (Ohne Beweis).

[25] Evariste Galois, 1811-32. Französischer Mathematiker, der die Mathematik revolutionierte und sich dann im Duell erschießen ließ.

17.8. **Polynome über Z_2.**

Definition 89. Polymom über einem Körper K

Definition. Sei K ein Körper. Ein Polynom über K ist ein Ausdruck

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,\ a_i \in K$$

$K[x]$ bezeichnet die Menge aller Polynome über K. Bemerkung: In $K[x]$ wird wie in der Menge der reellen Polynome gerechnet.

Im Folgenden sei $K = Z_2 = \{0, 1\}$.

Example 102. Polynome über (aus) dem Körper $K = Z_2 = \{0, 1\}$

Example.

- Grad 0: 0, 1
- Grad 1: x, $x+1$
- Grad 2: $x^2 + ax + b$ mit den Werten für a,b entsprechend den 4 möglichen Kombinationen von :

a	b	Polynom
0	0	x^2
0	1	x^2+1
1	0	x^2+x
1	1	x^2+x+1

- Grad 3: $x^3 + ax^2 + bx + c$. Wieder gibt es soviele Polynome, wie es Kombinationen von a, b, c gibt (d.h. soviele wie es dreistellige Dualzahlen gibt, nämlich 8).
- Grad 4: Es gibt $2^4 = 16$ Polynome.
- Grad n: Es gibt 2^n Polynome.

17.9. **Rechnen mit Polynomen über Z_2.** In Z_2 gilt: $1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = -1$. $+$ und $-$ werden hier nicht unterschieden. Deshalb ist das Polynom $x^2 + x$ identisch mit $x^2 - x$! Also müssen wir nur die Addition und Multiplikation von Polynomen betrachten:

Example 103. Addition von Polynomen

Example.

$$\begin{aligned}\left(x^3+x^2+x+1\right)+\left(x^5+x^2+1\right) &= x^5+x^3+2x^2+x+2\\ &= x^5+x^3+0x^2+x+0\\ &= x^5+x^3+x\end{aligned}$$

Example 104. Multiplikation von Polynomen

Example.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\ &= x^2+0x+1\\ &= x^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\ &= x^3+x^2+x+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+x^2+1\right) &= x^5+x^4+x^2+x^4+x^3+x+x^3+x^2+1\\ &= x^5+x+1\end{aligned}$$

Example 105. Polynomdivision in Z_2

Example. Die Polynomdivision kann in sehr einfachen Schaltungen realisiert werden, die angewandt werden zur Realisierung fehlerkorrigierender Codes, z.B. bei Festplatten.

$$\left(x^3+1\right) : (x+1) = x^2+x+1$$

Da die Subtraktion identisch ist mit der Addition, kann hier einfach addiert werden. Ansonsten verläuft die Polynomdivision identisch zu der in $\mathbb{R}$. Hier wurde $\left(x^3+1\right)$ zerlegt in das Produkt $(x+1)\left(x^2+x+1\right)$.

Example 106. Polynomdivision in Z_2 mit Rest

Example. Siehe Abbildung 67. Hier wurde zerlegt:Wenn eine Potenz z^{n}=1 ist, können alle weiteren Potenzen darauf zurückgeführt werden.

$$\left(x^5+x^2\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^3+x+1\right) + (x+1)$$

17.10. **Nullstellenbestimmung von Polynomen in Z_2.**

Definition 90. Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ über Z_2

Definition. Unter einer Nullstelle eines Polynoms $p(x) \in Z_2[x]$ versteht man ein Element $x_0 \in Z_2$ mit $p(x_0) = 0$. Auch hier gilt der Hauptsatz der Algebra (er gilt sogar ganz allgemein für Polynome in Ringen mit 1): Hat $p(x)$ die Nullstelle $x_0 \in Z_2$, dann ist $p(x)$ durch $x+x_0$[26] teilbar. Das heißt, es gilt: $p(x) = q(x) \cdot (x + x_0)$. Wenn $p(x)$ den Grad n hatte, so hat nun $q(x)$ den Grad $n-1$.

Da die Nullstellen in Z_2 nur 0 oder 1 sein können, ist das Erraten von Nullstellen sehr einfach:

Example 107. Nullstelle 1 von Polynomen

Example.

$$x^3 + x^2 + x + 1$$

Dieses Polynom hat die Nullstelle $x_0 = 1$, wie jedes Polynom mit gerader Anzahl von Summanden: dann nämlich entsteht für $p(1)$ eine gerade Zahl, die äquivalent modulo 2 zu 0 ist. Polynomdivision zur Probe:

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) : (x + 1) = x^2 + 1$$

Wieder kann man eine Nullstelle $x_1 = 1$ erraten!

Example 108. Nullstelle 0 von Polynomen

Example.

$$x^5 + x^3 + x$$

Wenn man x ausklammern kann (d.h. das Absolutglied fehlt), so ist $x_0 = 0$ eine Nullstelle. Denn auch hier gilt wie in $\mathbb{R}$, dass ein Produkt nur 0 ist, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Wenn $x_0 = 0$ eine Nullstelle ist, so muss man ja nach dem Hauptsatz der Algebra durch $(x + 0) = x$ teilen können, d.h. man muss x ausklammern können. Also Zerlegung:

$$x^5 + x^3 + x = \left(x^4 + x^2 + 1\right) x$$

Definition 91. reduzible und irreduzible Polynome

Definition. Ein Polynom $p(x) \in Z_2[x]$ mit Grad $p \geq 1$ heißt zerlegbar (oder »reduzibel«), wenn es Polynome $p_1(x)$, $p_2(x) \in Z_2[x]$ gibt mit $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$ und Grad $(p_i) \geq 1$. Andernfalls heißt $p(x)$ unzerlegbar (auch »irreduzibel«).

Wie müssen Polyome mindestens aussehen, um irreduzibel zu sein? Sei $p_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0$, $k \geq 2$, $a_k = 1$. Ist $p_k(x)$ irreduzibel, dann gilt:

- $a_0 = 1$, denn sonst hat das Polynom die Nullstelle $x_0 = 0$. Es darf aber keine Nullstelle haben, denn sonst ist es nach dem Haptsatz der Algebra zerlegbar!
- Die Anzahl der Summanden muss ungerade und ≥ 3 sein, denn sonst hat das Polynom die Nullstelle $x_0 = 1$ und das Polynom wäre damit nach dem Hauptsatz der Algebra zerlegbar.

Example 109. irreduzible Polynome über Z_2

Example. Die Bestimmung dieser irreduziblen Polynome ist ähnlich aufwändig wie die Bestimmung von Primzahlen: man muss bestimmen, ob ein Polynom Faktoren enthält.

Grad 1: Die beiden mögliche Polynome x und $x + 1$ sind unzerlegbar. Denn Polynome, aus denen es aufgebaut sein müsste, müssen nach Definition 91 vom Grad $p_i \geq 1$ sein, d.h. x enthalten - ihr Produkt würde dann aber x^2 enthalten.

[26]entspricht dem Linearfaktor $(x - x_0)$ in $\mathbb{R}$!

Wenn eine Potenz z^{n}=1 ist, können alle weiteren Potenzen darauf zurückgeführt werden.Wenn eine Potenz z^{n}=1 ist, können alle weiteren Potenzen darauf zurückgeführt werden.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen

Freiwillige vor!

ABBILDUNG 67. Polynomdivision in Z_2 mit Rest

Grad 2: Es sind insgesamt 4 Polynome $x^2 + ax + b$ möglich. Wegen Definition 91 muss $b = 1$ sein (sonst $x_0 = 0$ Nullstelle) und $a \neq 0$ (sonst gerade Summandenzahl und $x_0 = 1$ Nullstelle). Also kommt für ein unzerlegbares Polynom überhaupt nur in Frage:

$$x^2 + x + 1$$

Wenn es zerlegbar ist, so muss es aus Polynom-Faktoren vom Grad 1 bestehen, d.h. es muss entweder durch x oder $x + 1$ teilbar sein, d.h. $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ wären Nullstellen. Da dies nicht der Fall ist, ist dieses Polynom nicht zerlegbar. Damit wäre schon ein fehlerkorrigierender Code möglich.

Grad 3: Welche der 8 Polynome $x^3 + ax^2 + bx + c$ vom Grad 3 sind irreduzibel? Es muss gelten wegen Definition 91:

- $c = 1$
- $a = 1 \wedge b = 0$ oder $a = 0 \wedge b = 1$, damit die Summandenzahl ungerade ist.

In Frage kommen damit noch die folgenden beiden Polynome:

$$x^3 + x^2 + 1$$
$$x^3 + x + 1$$

Wären diese Polynome vom Grad 3 reduzibel, wäre ein Faktor vom Grad 1, der andere vom Grad 2.

Ein Faktor vom Grad 1 (d.i. x oder $x + 1$) würde bedeuten, dass die Polynome $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ als Nullstellen haben. Dies ist nicht der Fall, also sind beide Polynome irreduzibel.

Grad 4: Die irreduziblen Polynome sind hier:

$$x^4 + x + 1$$
$$x^4 + x^3 + 1$$
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Beweis: Insgesamt gibt es 16 Polynome $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Es muss gelten wegen Definition 91:

- $d = 1$ (denn sonst ist $x_0 = 0$ eine Nullstelle). Es bleiben noch 8 Polynome übrig.
- die Anzahl der Summanden muss ungerade und ≥ 3 sein. Entweder müssen also $a, b, c = 1$ sein, oder zwei von diesen $= 0$. Es bleiben also folgende Polynome übrig:

$$x^4 + x + 1$$
$$x^4 + x^3 + 1$$
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$x^4 + x^2 + 1$$

- Angenommen, es gebe darunter zerlegbare Polynome $q(x)$. Diese könnten enthalten:
  - Einen Teiler vom Grade 1 (d.i. x oder $x + 1$) und einen Teiler vom Grade 3. In jedem Fall hätte $q(x)$ die Nullstellen 0 oder 1; dies ist jedoch nicht möglich aufgrund der Selektionskriterien, denen diese Polynome genügen.
  - Zwei Teiler vom Grad 2, d.h. quadratische Polynome. Dies müssen irreduzible Polynome vom Grad 2 sein, denn sonst würden sie und auch $q(x)$ einen Teiler vom Grad 1 enthalten, was oben ausgeschlossen wurde. Es gibt nur ein irreduzibles Polynom vom Grad 2:

    $$x^2 + x + 1$$

    Wenn sein Quadrat eines der obigen Polynome ergibt, wurde also die Zerlegbarkeit gefunden:

    $$\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^4 + x^2 + 1$$

    Das Polynom $x^4 + x^2 + 1$ ist reduzibel - damit wurde die zuerst angegebene Liste der irreduziblen Polynome bewiesen.

Definition 92. Wichtiger Satz für die Codierungstheorie

Definition.

(1) $Z_2[x]$ (»die Menge aller Polynome über Z_2«) enthält zu jedem $m \in \mathbb{N}$ mindestens ein irreduzibles Polynom $p(x)$ mit Grad $(p) = m$. Für jeden Grad der Polynome wird man also ein irreduzibles Polynom finden.

(2) Sei $p(x) \in Z_2[x]$ irreduzibel und vom Grad $(p) = m$. Sei $n = 2^m - 1$. Dann teilt $p(x)$ das Polynom $x^n + 1 = x^n - 1$. Folgerung: $x^n + 1$ enthält alle irreduziblen Polynome vom Grad m als Teiler (Faktoren). Wenn man also irreduzible Polynome vom Grad m sucht, so ermittle man das Polynom $x^n + 1$. Dessen Zerlegung in Faktoren enthält alle irreduziblen Polynome vom Grad m (und weitere Faktoren)!

17.11. **Fehlererkennende und Fehlerkorrigierende Codes.**

17.11.1. *Grundlagen.*

Definition 93. binäres Codewort der Länge k

Definition. Ein binäres Codewort der Länge k (»k-Bit-Wort«) ist eine Folge von genau k Elementen aus $B = \{0, 1\}$.

Example 110. binäres Codewort der Länge 6

Example.

$$011010$$

Definition 94. Binärcode der Länge k

Definition. Ein Binärcode der Länge k (»k-Bit-Code«) ist definiert als eine Menge von k-Bit-Wörtern, also eine Teilmenge von $B^k := \prod_{i=1}^{k} B = B \times B \times \ldots \times B$[27].

In der Nachrichtentechnik werden stets binäre Informationen (k-Bit-Worte) von einem Sender S an einen Empfänger E gesendet. Wenn sie fehlerhaft sind, kann man oft nicht eine Retransmission verlangen, sondern muss erkennen können, welche Bits falsch sind (d.i. gleichzeitig, wie sie richtig lauten müssen). Ist dies möglich?

Ja, dazu bettet man den k-Bit-Code in einen n-Bit-Code ein, $n > k$, und nutzt die zusätzlcihen $n - k$ Bits zur Fehlerkontrolle. Diese zusätzlichen Bits sind »überflüssig« (redundant), sie sind zur Informationsübertragung nicht nötig.

Definition 95. Redundanzcode

Definition. Ein (n, k)-Redundanz-Code (kurz: (n, k)-Code) ist ein n-Bit-Code mit k Informationsbits und $m = n - k$ Kontrollbits.

Example 111. Das Parity-Bit

Example. Dies ist ein $(9, 8)$-Code. In Servern besteht der RAM aus Bytes zu 9 Bit, wobei das 9-te Bit (Parity-Bit) nur zur Fehlerkontrolle dient.

$$a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$$

Hier ist a_1 das Kontrollbit, $a_2 \ldots a_9$ die Informationsbits. Zur Bildung des Parity-Bits gibt es zwei Möglichkeiten:

- gerade Parität: durch das Paritätsbit wird auf eine gerade Anzahl von 1en ergänzt.

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2) \mod 2 \\ &= a_9 \oplus a_8 \oplus a_7 \oplus a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \oplus a_3 \oplus a_2 \end{aligned}$$

  $\oplus$ ist das Zeichen für XOR. Daraus folgt: in $a_9 \ldots a_1$ kommt dann eine gerade Anzahl von 1en vor.
- ungerade Parität: durch das Paritötsbit wird auf eine ungerade Anzahl von 1en ergänzt.

Der Empfänger kann also nur erkennen, dass ein Bit falsch ist; er kann ihn nicht korrigieren, und er kann nicht eine gerade Anzahl falscher Bits erkennen.

17.11.2. *Hamming-Code.* Fehler von 1 und 2 Bit können erkannt, Fehler von 1 Bit können korrigiert werden. Motivation: Betrachte alle dreistelligen Dualzahlen ohne 0:

$$\begin{array}{ll} a_1 & 001 \\ a_2 & 010 \\ a_3 & 011 \\ a_4 & 100 \\ a_5 & 101 \\ a_6 & 110 \\ a_7 & 111 \end{array}$$

Für die Spalten gilt dabei:

- a_4 ergänzt a_7, a_6, a_5 auf gerade Parität in dieser Spalte
- a_2 ergänzt a_7, a_6, a_3 auf gerade Parität in dieser Spalte
- a_1 ergänzt a_7, a_5, a_3 auf gerade Parität in dieser Spalte

[27] Die Symbolik $\Pi_{i=1}^{k}$ meint hier das Produktzeichen, nicht eine Indexmenge Π wie an anderer Stelle in diesem Dokument.

a_1, a_2, a_4 sind hier die Stufenzahlen im Dulsystem, d.h. sie enthalten alle nur eine 1, und das in je einer anderen Spalte. Man verwendet sie zur Berechnung der Paritäten im Hamming-Code. Ein $(7,4)$-Hamming-Code ist die Menge aller 7-Bit-Wörter (Aufbau: $a_7, \ldots, a_1$) mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_5 \\ a_2 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_3 \\ a_1 &= a_7 \oplus a_5 \oplus \mathrm{a}_3 \end{aligned}$$

Dabei heißen a_7, a_6, a_5, a_3 Informationsbits und a_4, a_2, a_1 die daraus nach obiger Formel berechneten Kontrollbits.

Example 112. Codierung und Decodierung mit dem Hamming-Codes

Example. Der Sender S will die Bitfolge $s_1s_2s_3s_4 = 1011$ an den Empfänger E übertragen. senden. S bettet s_1, s_2, s_3, s_4 in ein 7-Bit-Wort des Hamming-Code wie folgt ein:

$$\begin{array}{ccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 & s_4 & s_1 \oplus s_2 \oplus s_4 & s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Was macht der Empfänger E damit? Er überprüft, ob die Kontrollbits die jeweils kontrollierten Bits tatsächlich auf gerade Parität ergänzen:

$$\begin{aligned} p_3 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \\ p_2 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_3 \oplus a_2 \\ p_1 &= a_7 \oplus a_5 \oplus a_3 \oplus a_1 \end{aligned}$$

Wenn kein 1-Bit-Fehler aufgetreten ist, so ist $p_3p_2p_1 = 000$, d.h. es bestehen gerade Pritäten. In der Praxis treten Fehler sehr oft als Bündelfehler auf. Bei manchen Übertragungswegen ist es jedoch wahrscheinlicher, dass 1 Bit als dass 2 oder mehr Bits verfälscht werden, so dass singuläre Fehlerkorrektur gute Ergebnisse liefert (z.B. Modems; sie zählen die korrigierten Fehler mit und verkürzen dementsprechend ggf. die Länge der übertragenen Blöcke). Wenn genau ein Bit verfälscht wurde, ist $p_3p_2p_1$ die Positionsnummer, einfach als positive Dualzahl interpretiert.

Example 113. Fehlerkorrektur beim Hamming-Code

Example. E empfange die folgende Bitfolge:

$$\begin{array}{ccccccc} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Hier ist im Vergleich zu Beispiel 112 a_5 verfälscht. Die Dualzahl $p_3p_2p_1$ ist;

$$\begin{aligned} p_3 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 = 1 \\ p_2 &= a_7 \oplus a_6 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \\ p_1 &= a_7 \oplus a_5 \oplus a_3 \oplus a_1 = 1 \end{aligned}$$

$p_3p_2p_1 = 101_2 = 5$ gibt nun an, dass a_5 verfälscht ist; man berichtigt es durch invertieren. Dabei geht man davon aus, dass nur 1 Bit zerstört wurde; wenn mehr Bits verfälscht sind, ist die durchgeführte Korrektur selbst falsch.

Der Hamming-Code liefert auch die richtige Nummer für falsche Kontrollbits; dann ist keine Korrektur nötig!

17.11.3. *Codierung und Decodierung mittels Matrix-Multiplikation mod* 2.

Codierung: Ein Vektor $s_1s_2s_3s_4$ soll mit einer geeigneten Matrix so multipliziert werden, dass die Bitpositionen des Hamming-Codes entstehen:

$$a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt Generator-Matrix G.

Decodierung:

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} = (a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird H^T genannt, d.i. die transponierte Matrix[28] der Kontrollmatix H; beide enthalten interessanterweise die Dualzahlen $1-7$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.11.4. *Schaltungstechnische Schönheitsfehler des Hamming-Codes.*

(1) Die Kontrollbits sind im Codewort verstreut; besser ist folgende Anordnung:

$$a_7a_6a_5a_3a_4a_2a_1$$

Zur Korrektur werden in den Matrizen G und H die dritte und vierte Spalte vertauscht.

(2) Schaltungen zur Matrixmultiplikation in Hardware sind zu teuer, für die zyklischen Codes (CRC-Codes: cyclic redundancy codes) sind weit billigere Schaltungen möglich.

17.11.5. *CRC-Codes.* Mit diesen Codes, die dem Hamming-Code ähneln, funktioniert die Fehlerkorrektur auf Festplatten und CD-ROMs. Man überlegt vorher, wieviel redundante Bits (Kontrollbits) $m \in \mathbb{N}$ man verwenden will. Die Gesamtzahl der Bits pro Codewort ist dann $n = 2^m - 1$.

Zerlege $x^n + 1$ in irreduzible Polynome in Z_2. Unter diesen kommt nach Definition 92 mindestens eines vom Grad m vor. Es heißt Generatorpolynom eines (n,k)-CRC mit $k = n-m$ Informationsbits und m Kontrollbits; es liefert ggf. die Generatormatrix. Von der Zerlegungsmöglichkeit des Polynoms $x^n + 1$ hängt ab, wieviele der insgesamt k Informationsbits mit einer gegebenen Anzahl m Kontrollbits kontrolliert werden können.

Das Produkt der übrigen irreduziblen Faktoren von $x^n + 1$ heißt Kontrollpolynom, das ggf. die Kontrollmatrix liefert.

Example 114. $(7,4)$-CRC-Code

Example. Sei $m = 3$, $\Rightarrow n = 2^3 - 1 = 7$, $\Rightarrow k = n - m = 7 - 3 = 4$, also ein $(7,4)$-CRC.

$$x^7 + 1 = (x+1)\left(x^3 + x + 1\right)\left(x^3 + x^2 + 1\right)$$

Dies ist die vollständige Zerlegung in irreduzible Polynome. Man wähle nun z.B. $g(x) = \left(x^3 + x^2 + 1\right)$ als Generatorpolynom, die restlichen Polynome ergeben zusammen das Kontrollpolynom $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$. Wir erhalten einen $(7,4)$-CRC, der wie der $(7,4)$-Hamming-Code 1-Bit-Fehler korigiert, aber schaltungstechnisch günstiger ist.

Konstruktion der Generator-Matrix G: Berechne für $i = m, m+1, \ldots, n-1$ mit den Polynomdivisionen $x^i : g(x)$

$$x^i = q_i(x) \cdot g(x) + r_i(x)$$

mit Grad $r_i(x) < m$. Die gesuchten $r_i(x)$ heißen »Rest von x^i modulo $g(x)$«. Hier ist $m = 3$, $n = 7$. Also werden folgende Polynomdivisionen durchgeführt:

$$\begin{aligned} x^3 : \left(x^3 + x^2 + 1\right) &= 1 + \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow x^3 &= 1 \cdot g(x) + x^2 + 1 \end{aligned}$$

mit $x^2 + 1 = r_3(x)$.

$$\begin{aligned} x^4 : \left(x^3 + x^2 + 1\right) &= x + 1 + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow x^4 &= (x+1)\, g(x) + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

[28] Eine Matrix wird transponiert, indem man ihre Zeilen und Spalten vertauscht.

mit $x^2+x+1=r_4(x)$

$$\begin{aligned} x^5 : \left(x^3+x^2+1\right) &= x^2+x+1+\frac{x+1}{x^3+x^2+1} \\ \Leftrightarrow x^5 &= \left(x^2+x+1\right) g(x) + x + 1 \end{aligned}$$

mit $x+1=r_5(x)$

$$\begin{aligned} x^6 : \left(x^3+x^2+1\right) &= x^3+x^2+x+\frac{x^2+x}{x^3+x^2+1} \\ \Leftrightarrow x^6 &= \left(x^3+x^2+x\right) g(x) + x^2 + x \end{aligned}$$

mit $x^2+x=r_6(x)$

Die Generatormatrix hat in ihren Zeilen die Koeffizienten von $x^i + r_i(x)$, $i = n-1, \ldots, m$:

$$G = \begin{pmatrix} & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ x^6+r_6(x) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x^5+r_5(x) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x^4+r_4(x) & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x^3+r_3(x) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix G besteht in den ersten k Zeilen und Spalten aus der Einheitsmatrix $E_{k,k}$ und danch aus einer Matrix $R_{k,m}$. Der Empfänger bildet aus der Generatormatrix wie folgt die Kontrollmatrix (hier ohne Begründung):

$$H = \left(R_{k,m}^T, E_{m.m}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Decodierung benötigt man die transponierte Kontrollmatrix:

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 115. korrekte Übertragung der Nachricht 1011 mit einem $(7,4)$-CRC-Code

Example. Codierung durch den Sender:

$$(1011) \cdot G = (1011100) = v$$

Aufgrund der Einheitsmatrix in G wird zuerst die Information gesendet, danach folgen erst die Kontrollbits (anders als beim Hamming-Code). Decodierung des Vektors v durch den Sender durch Multiplikation mit H^T:

$$v \cdot H^T = (1011100) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (000)$$

Wenn kein Fehler aufgetreten ist, so ist wie hier $p_3p_2p_1 = 000$.

Example 116. fehlerhafte Übertragung der Nachricht 1011 mit einem $(7,4)$-CRC-Code

Example. Der Empfänger hat erhalten

$$v = (1001100)$$

Im Unterschied zu vorigem Beispiel ist also das dritte Bit falsch. Er decodiert:

$$v \cdot H^T = (111)$$

Bei CRC-Codes gibt $p_3p_2p_1$ nicht als Dualzahl die Position des falschen Bits an, anders als bei den Hamming-Codes. Stattdessen kann die Anordnung der Bits direkt aus H^T abgelesen werden, nämlich gerade entsprechend der in den Zeilen dargestellten Dualzahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} a_6 \\ a_3 \\ a_7 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Die Bits liegen also in der Reihenfolge $a_6a_3a_7a_5a_4a_2a_1$ vor. Da oben $v \cdot H^T = 111$ ist, weiß man also, dass das Bit an der dritten Position falsch ist.

17.11.6. *Schaltungen zu CRC-Codes auf Festplatten*[29]. Die Schaltungen zu den CRC-Codes sind sehr einfach: Das Generatorpolynom sei $g(x) = x^3 + x^2 + 1 = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0$. Für jeden Koeffizienten 1 wird in der Prinzipschaltung eine Leitung und ein $\oplus$ (die Addition mod 2) eingezeichnet (siehe Abbildung 68)! Die eingezeichneten Flipflops sind Speicherzellen für ein einziges Bit. In der realen Schaltung werden Multiplexer (Weichen) verwendet (Abbildung 69). Verfahren der Codierung:

(1) An e die k Informationsbits in k Takten eingegeben.
(2) Beide Schalter (eigtl. Multiplexer) umlegen, d.h. aus der in Abbildung 69 angegebenen Position in die andere schalten.
(3) Über den dann freiwerdenden Weg werden in drei Takten die Inhalte der Flipflops ausgelesen, das sind die drei berechneten Kontrollbits. Dies entspricht dem Auslesen eines 3-Bit-Schieberegisters.

Der Empfänger hat eine identische Schaltung mit einem Zusatz, um zu prüfen, ob die Inhalte der Flipflops Null sind. Er liest alle 7 Bit (in 7 Takten) in die Schaltung ein. Enthalten die Flipflops nur Nullen, dann ist kein (erkennbarer!) Fehler aufgetreten. Ansonsten wird eine Fehlerkorrektur an den zwischengespeicherten Informationsbits durchgeführt.

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 68. Prinzipschaltung zur Auswertung eines CRC-Codes

Abbildung noch nicht von Zeichnung übertragen
Freiwillige vor!

Abbildung 69. Reale Schaltung zur Auswertung eines CRC-Codes

Example 117. CRC-Codes auf Festplatten und Disketten

Example. Ein Sektor hat 512 Info-Bytes und 2 Kontroll-Bytes, das sind 16 Bit. Das Generatorpolynom hat also den Grad 16. Es ist:

$$g(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$$

Es ist nicht irreduzibel, um auch Bündelfehler entdecken zu können, wird aber identisch konstruiert. Es wurde von der ITU, einer Unterorganisation der UNO, als Standard[30] festgelegt. Dieses Polynom $g(x)$ wird nur zur Fehlererkennung verwendet, nicht zu deren Korrektur. Bei Festplatten verlangt der Controller eine erneute Übertragung des Sektors, wenn ein Fehler aufgetreten ist; ist der Fehler persistent, wird ein Hardware-Fehler ausgegeben. Beim anschließenden Neuformatieren wird der Sektor vom Controller erkannt und vom Controller oder der Software als fehlerhaft markiert und dann nie mehr benutzt.

Dieses Polynom erkennt:

[29] Dieser Abschnitt bis zum Ende des Dokuments ist nicht relevant für die Klausur.
[30] IBM hatte vorher ein eigenes, nicht so leistungsfähiges Polynom verwendet: $x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$. Darüber hat jemand einmal eine Doktorarbeit geschrieben.

- 1-Bit-Fehler zu 100%
- 2-Bit-Fehler zu 100%
- Fehler mit gerader Anzahl von Bits zu 100%
- Bündelfehler bis 16 Bit zu 100%
- alle anderen Bündelfehler zu midestens 99,996%

CRCs werden oft nur zur Fehlererkennung eingesetzt; werden sie zur Fehlerkorrektur benutzt, nennt man sie ECCs (error correcting codes). Je nachdem, was der Code leisten und erkennen soll, müssen die Polynome etwas unterschiedlich konstruiert werden.

Index